



· 不确定性与知识获取 ·

基于粗糙近似的区间值模糊形式背景属性约简

李同军, 孟琦峰, 吴伟志

(浙江海洋大学 信息工程学院, 浙江 舟山 316022)

摘要 将粗糙集技术融入形式概念分析是数据分析和信息处理的一种重要方法, 其对数据知识发现具有重要意义。在区间值模糊形式背景中定义两种粗糙近似算子, 从而导出一种新型单边概念格, 即经典-区间值模糊概念格, 主要研究新型概念格的属性约简。给出区间值模糊形式背景属性约简和差别矩阵的定义, 研究协调属性集判定和约简计算方法。给出协调属性集判定定理和基于差别矩阵的约简计算方法。新概念模型可为区间值模糊形式背景中的知识发现提供新方法, 给出的约简方法有利于开发高效的属性约简算法。

关键词 区间值模糊形式背景; 经典-区间值模糊概念格; 属性约简; 区间值模糊集

中图分类号: TP18 **DOI:** 10.16152/j.cnki.xdxbr.2025-02-010

Attribute reduction of interval-valued fuzzy formal contexts based on rough approximations

LI Tongjun, MENG Qifeng, WU Weizhi

(College of Information Engineering, Zhejiang Ocean University, Zhoushan 316022, China)

Abstract The integration of rough sets into formal concept analysis is an important method for data analysis and information processing, which is of great significance for data knowledge discovery. Two rough approximation operators are defined in an interval-valued fuzzy formal context, and a new type of one-side concept lattice, namely, crisp-interval-valued fuzzy concept lattice, is derived, and its attribute reduction is mainly studied. According to the definition of attribute reduction of interval-valued fuzzy formal context, the judgement of consistent attribute sets is considered, and by using the techniques of discernibility matrix of rough sets, the calculation method of reducts is explored. The new concept model can provide new approaches for the knowledge discovery of interval-valued fuzzy formal contexts, and the obtained reduction method is beneficial to develop efficient attribute reduction algorithms.

Keywords interval-valued fuzzy formal context; crisp-interval-valued fuzzy concept lattice; attribute reduction; interval-valued fuzzy sets

概念格理论是建立在形式背景之上的一种数据分析和知识发现的重要工具^[1], 在许多领域都有成功的应用, 如知识工程、信息检索等。

形式背景建立起对象集和属性集之间的一个二元关系, 然而许多实际问题中对象和属性间的关系是模糊关系, 因此, 基于模糊形式背景的概念

收稿日期: 2024-09-28

基金项目: 国家自然科学基金(12371466)

第一作者: 李同军, 男, 博士, 教授, 从事粒计算、概念格、粗糙集研究, litj@zjou.edu.cn。

分析应运而生。Burusco 和 Fuentes-Gonzalez 于 1994 年首次在模糊形式背景中提出了 L-模糊概念格的概念^[2]。

区间值模糊形式背景是模糊形式背景的一种推广,有着广阔的应用前景。关于区间值模糊形式背景的概念分析和知识约简研究已经取得了一些成果^[3-4]。与区间值模糊形式背景概念分析密切相关的是区间值形式背景上的研究工作。结合张文修等提出的属性约简方法^[5],吴克生首次在区间值形式背景中定义了概念格^[6],杨建峰等借助差别矩阵研究了区间值概念格的约简^[7]。文献[8-9]对区间值决策形式背景的约简问题进行了研究。文献[6-9]涉及的概念又称为单边概念,单边概念首先由 Krajic 和 Yahia 等独立地提出^[10-11]。

将粗糙集方法应用于形式概念分析研究是一种重要方法。Duntsch 等和 Yao 首先利用粗糙近似算子定义了形式概念,给出了面向属性概念格和面向对象概念格^[12-13]。Li 等将文献[13]的方法用于模糊形式背景的概念研究,定义了一种单边概念,即经典-模糊概念^[14]。

本文首次将粗糙近似运算用于区间值模糊形式背景中单边概念问题研究,定义区间值模糊形式背景中一种新型的单边概念格,即经典-区间值模糊概念格,研究概念格属性约简,给出基于差别矩阵的约简方法。

1 预备知识

1.1 广义粗糙近似算子和概念格

广义近似空间是一个三元组 (U, V, R) ,其中 U 和 V 是两个非空、有限的论域, R 是 U 到 V 的一个二元关系,即 $R \subseteq U \times V$ 。 $A \subseteq V$ 在 (U, V, R) 中的下近似 $\underline{R}(A)$ 和上近似 $\overline{R}(A)$ 分别定义为^[15]

$$\begin{aligned}\underline{R}(A) &= \{x \in U \mid R_s(x) \subseteq A\}, \\ \overline{R}(A) &= \{x \in U \mid R_s(x) \cap A \neq \emptyset\}.\end{aligned}$$

其中, $R_s(x)$ 是 $x \in U$ 在 R 下的后继邻域,即 $R_s(x) = \{y \in V \mid (x, y) \in R\}$ 。分别称 $\overline{R}$ 和 $\underline{R}$ 为广义上、下近似算子。

广义近似算子 $\underline{R}$ 和 $\overline{R}$ 满足下列性质:

- 1) $\underline{R}(V) = U, \overline{R}(\emptyset) = \emptyset$;
- 2) $A_1 \subseteq A_2, \underline{R}(A_1) \subseteq \underline{R}(A_2),$
 $\overline{R}(A_1) \subseteq \overline{R}(A_2)$;

- 3) $\underline{R}(A_1 \cap A_2) = \underline{R}(A_1) \cap \underline{R}(A_2),$
 $\overline{R}(A_1 \cup A_2) = \overline{R}(A_1) \cup \overline{R}(A_2)$;
- 4) $\underline{R}(A_1 \cup A_2) \supseteq \underline{R}(A_1) \cup \underline{R}(A_2),$
 $\overline{R}(A_1 \cap A_2) \subseteq \overline{R}(A_1) \cap \overline{R}(A_2)$ 。

形式背景是一个三元组 (G, M, I) , G 和 M 是非空、有限的集合,分别称为对象集和属性集, I 是 G 到 M 的二元关系。用 I^{-1} 表示 I 的逆,即

$$I^{-1} = \{(a, x) \in M \times G \mid (x, a) \in I\}.$$

对于 $X \subseteq G, B \subseteq M$,记 $\underline{I}(B), \overline{I}(B), \underline{I}^{-1}(X), \overline{I}^{-1}(X)$ 分别为 $B^\square, B^\diamond, X^\square, X^\diamond$ 。

若 $X^\square = B, B^\diamond = X$,则称 (X, B) 是一个面向对象概念;若 $X^\diamond = B, B^\square = X$,则称 (X, B) 是一个面向属性概念^[13]。

形式背景 (G, M, I) 的全体面向对象概念的集合和全体面向属性概念的集合在一个共同的偏序下形成完备格,故分别称为面向对象概念格和面向属性概念格,其中偏序为

$$(X_1, B_1) \leq (X_2, B_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2.$$

1.2 区间值模糊集

区间 $[0, 1]$ 中的闭区间 $[a, b]$ 又称为区间数,若 $a < b$,则 $[a, b]$ 就是普通区间;若 $a = b$,则 $[a, b]$ 退化为实数 a 。全体区间数的集合记为 $D[0, 1]$,其上的一个偏序定义为^[16]

$$\begin{aligned}D_1 &= [a_1, b_1], D_2 = [a_2, b_2] \in D[0, 1], \\ D_1 &\leq D_2 \Leftrightarrow a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2.\end{aligned}$$

关于上面的偏序, $D[0, 1]$ 中任意两个区间数 $D_1 = [a_1, b_1]$ 和 $D_2 = [a_2, b_2]$ 都有下确界 $D_1 \wedge D_2$ 和上确界 $D_1 \vee D_2$,分别是

$$\begin{aligned}D_1 \wedge D_2 &= [\min\{a_1, a_2\}, \min\{b_1, b_2\}], \\ D_1 \vee D_2 &= [\max\{a_1, a_2\}, \max\{b_1, b_2\}].\end{aligned}$$

因此, $(D[0, 1], \leq)$ 是一个完备格,它的最小元和最大元分别是 $[0, 0]$ 和 $[1, 1]$ 。

设 G 是一个非空、有限的论域, G 上的区间值模糊集 $\vec{F}$ 是 G 到 $D[0, 1]$ 的一个映射^[16],即

$$\vec{F}: G \rightarrow D[0, 1].$$

对于任何 $x \in G$, $\vec{F}(x)$ 记为 $[\underline{F}(x), \overline{F}(x)]$ 。显然, $\underline{F}$ 和 $\overline{F}$ 是两个 G 上的经典模糊集,满足 $\underline{F} \subseteq \overline{F}$ 。若对于任意 $x \in G$,都有 $\underline{F}(x) = \overline{F}(x)$,则区间值模糊集 $\vec{F}$ 就退化为一个经典模糊集,因此,区间值模糊集是经典模糊集的一种推广。

记 G 上的全部区间值模糊集组成的集合为 $IVFS(G)$ 。对于 $\vec{E}, \vec{F} \in IVFS(G)$, $\vec{E}$ 和 $\vec{F}$ 的交 $\vec{E} \cap \vec{F}$

和并 $\vec{E} \cup \vec{F}$ 分别定义为

$$(\vec{E} \cap \vec{F})(x) = \vec{E}(x) \wedge \vec{F}(x), x \in G,$$

$$(\vec{E} \cup \vec{F})(x) = \vec{E}(x) \vee \vec{F}(x), x \in G。$$

因此, $\vec{E} \subseteq \vec{F} \Leftrightarrow \vec{E}(x) \leq \vec{F}(x), x \in G。$

2 经典-区间值模糊概念格

定义1^[17] 区间值模糊形式背景是一个三元组 $(G, M, \vec{I})$, 其中 G 是非空、有限的对象集, M 是非空、有限的属性集, $\vec{I}$ 是 G 到 M 的一个区间值模糊二元关系, 即 $\vec{I}: G \times M \rightarrow D[0, 1]$ 。

当区间值模糊关系 $\vec{I}$ 退化为经典模糊关系 $\tilde{I}$ 时, 区间值模糊形式背景 $(G, M, \vec{I})$ 就退化为一个经典模糊形式背景 $(G, M, \tilde{I})$ 。

对于 $x \in G, a \in M, x\vec{I} \in IVFS(M), \vec{I}a \in IVFS(G)$, 满足

$$(x\vec{I})(a) = \vec{I}(x, a), a \in M;$$

$$(\vec{I}a)(x) = \vec{I}(x, a), x \in G。$$

其中: $x\vec{I}$ 表示对象 x 所具有的区间值模糊属性集; $\vec{I}a$ 表示具有属性 a 的区间值模糊对象集。

定义2 设 $(G, M, \vec{I})$ 是一个区间值模糊形式背景, $X \subseteq G, \vec{B} \in IVFS(M)$, 令

$$f(X) = \bigcup_{x \in X} x\vec{I} \tag{1}$$

$$h(\vec{B}) = \{x \in G \mid x\vec{I} \subseteq \vec{B}\} \tag{2}$$

可以看出, f 是 $P(G)$ 到 $IVFS(M)$ 的映射, h 是 $IVFS(M)$ 到 $P(G)$ 的映射。这里, $P(G)$ 表示 G 的所有子集的集合。 $f(X)$ 表示对象集 X 所具有的区间值模糊属性集, $h(\vec{B})$ 表示区间值属性集包含于 $\vec{B}$ 的对象组成的集合。

当区间值模糊形式背景 $(G, M, \vec{I})$ 退化为一个经典模糊形式背景 $(G, M, \tilde{I})$ 时, 定义2中 $f(X)$ 和 $h(\vec{B})$ 就退化为文献[18]中的 $X^\diamond$ 和 $\tilde{B}^\square$, 即

$$X^\diamond = \bigcup_{x \in X} x\tilde{I},$$

$$\tilde{B}^\square = \{x \in G \mid x\tilde{I} \subseteq \tilde{B}\}。$$

对于 $\vec{B} \in IVFS(M)$, 记 $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, 则 $\vec{B}$ 表示为

$$(a_1^{\vec{B}(a_1)}, a_2^{\vec{B}(a_2)}, \dots, a_m^{\vec{B}(a_m)})。$$

定理1 设 $(G, M, \vec{I})$ 是一个区间值模糊形式背景, $X, X_1, X_2 \subseteq G, \vec{B}, \vec{B}_1, \vec{B}_2 \in IVFS(M)。$

$$1) X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f(X_1) \subseteq f(X_2),$$

$$\vec{B}_1 \subseteq \vec{B}_2 \Rightarrow h(\vec{B}_1) \subseteq h(\vec{B}_2);$$

$$2) f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2),$$

$$h(\vec{B}_1 \cap \vec{B}_2) = h(\vec{B}_1) \cap h(\vec{B}_2);$$

$$3) X \subseteq hf(X), fh(\vec{B}) \subseteq \vec{B};$$

$$4) fhf(X) = f(X), hfh(\vec{B}) = h(\vec{B})。$$

证明 1) 由于 $X_1 \subseteq X_2$, 所以 $\bigcup_{x \in X_1} x\vec{I} \subseteq \bigcup_{x \in X_2} x\vec{I}$, 故由式(1)得 $f(X_1) \subseteq f(X_2)。$

因为 $\vec{B}_1 \subseteq \vec{B}_2$, 所以对于任意 $x \in G, x\vec{I} \subseteq \vec{B}_1$, 蕴含 $x\vec{I} \subseteq \vec{B}_2$, 再由式(2)得 $h(\vec{B}_1) \subseteq h(\vec{B}_2)。$

2) 由定义2得

$$f(X_1 \cup X_2) = \bigcup_{x \in X_1 \cup X_2} x\vec{I} =$$

$$(\bigcup_{x \in X_1} x\vec{I}) \cup (\bigcup_{x \in X_2} x\vec{I}) =$$

$$f(X_1) \cup f(X_2),$$

$$h(\vec{B}_1 \cap \vec{B}_2) = \{x \in X \mid x\vec{I} \subseteq \vec{B}_1 \cap \vec{B}_2\} =$$

$$\{x \in X \mid x\vec{I} \subseteq \vec{B}_1, x\vec{I} \subseteq \vec{B}_2\} =$$

$$\{x \in X \mid x\vec{I} \subseteq \vec{B}_1\} \cap \{x \in X \mid x\vec{I} \subseteq \vec{B}_2\} =$$

$$h(\vec{B}_1) \cap h(\vec{B}_2)。$$

3) 对于任意 $X \subseteq G$, 由式(1)和式(2), 有 $hf(X) = \{x \in G \mid x\vec{I} \subseteq f(X)\}$ 。对于任意 $x \in X$, 显然 $x\vec{I} \subseteq \bigcup_{x \in X} x\vec{I} = f(X)$, 故 $x \in hf(X)$ 。因此, $X \subseteq hf(X)。$

$\vec{B} \in IVFS(M)$, 由式(1)得 $fh(\vec{B}) = \bigcup_{x \in h(\vec{B})} x\vec{I}$ 。对

于 $x \in G, x \in h(\vec{B}) \Leftrightarrow x\vec{I} \subseteq \vec{B}$, 故 $fh(\vec{B}) \subseteq \vec{B}。$

4) 由条件3)可知 $X \subseteq hf(X)$, 再由条件1)得 $f(X) \subseteq fhf(X)$ 。由条件3)得 $fh(\vec{B}) \subseteq \vec{B}, \vec{B} \in IVFS(M)$, 用 $f(X)$ 代替 $\vec{B}$ 得 $fhf(X) \subseteq f(X)$ 。故 $fhf(X) = f(X)。$

同理可证 $hfh(\vec{B}) = h(\vec{B})。$

可以看到, 定义2中的算子 f 和 h 与文献[18]中的算子 $\diamond$ 和 $\square$ 满足基本相同的性质。

定义3 设 $(G, M, \vec{I})$ 是一个区间值模糊形式背景, $X \subseteq G, \vec{B} \in IVFS(M)$, 若 $f(X) = \vec{B}, h(\vec{B}) = X$, 则称 $(X, \vec{B})$ 为 $(G, M, \vec{I})$ 中一个经典-区间值模糊概念, 简称概念, 分别称 X 和 $\vec{B}$ 为概念 $(X, \vec{B})$ 的

外延和内涵。

区间值模糊形式背景 $(G, M, \vec{I})$ 的全部概念的集合记为 $L(G, M, \vec{I})$ 或 $L(\vec{I})$, 所有 $(G, M, \vec{I})$ 中概念的外延组成的集合记为 $Ext(G, M, \vec{I})$ 或 $Ext(\vec{I})$ 。

由定理 1 和定义 3 易证, 对于任意 $X \subseteq G, (hf(X), f(X)) \in L(\vec{I})$; 对于任意 $\vec{B} \in IVFS(M), (h(\vec{B}), fh(\vec{B})) \in L(\vec{I})$ 。于是有

$$Ext(\vec{I}) = \{ hf(X) \mid X \subseteq G \} = \{ h(\vec{B}) \mid \vec{B} \in IVFS(M) \}$$

(3)

在 $L(\vec{I})$ 中定义偏序关系为

$$(X_1, \vec{B}_1) \leqslant (X_2, \vec{B}_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2,$$

则有以下定理 2。

定理 2 设 $(G, M, \vec{I})$ 是一个区间值模糊形式背景, 对于任意 $(X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2) \in L(\vec{I})$, 它们的上确界和下确界都存在, 且有

$$(X_1, \vec{B}_1) \vee (X_2, \vec{B}_2) = (hf(X_1 \cup X_2), \vec{B}_1 \cup \vec{B}_2),$$

$$(X_1, \vec{B}_1) \wedge (X_2, \vec{B}_2) = (X_1 \cap X_2, fh(\vec{B}_1 \cap \vec{B}_2))。$$

证明 只证明第一个等式, 第二个等式可类似证明。

首先, 证明 $(hf(X_1 \cup X_2), \vec{B}_1 \cup \vec{B}_2)$ 是一个概念。

由 $(X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2) \in L(\vec{I})$, 可知 $f(X_1) = \vec{B}_1, f(X_2) = \vec{B}_2$ 。结合定理 1, 有

$$fhf(X_1 \cup X_2) = f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2) = \vec{B}_1 \cup \vec{B}_2,$$

$$即 fhf(X_1 \cup X_2) = \vec{B}_1 \cup \vec{B}_2; 又有$$

$$h(\vec{B}_1 \cup \vec{B}_2) = h(f(X_1) \cup f(X_2)) = h(f(X_1 \cup X_2)) = hf(X_1 \cup X_2),$$

即 $h(\vec{B}_1 \cup \vec{B}_2) = hf(X_1 \cup X_2)$ 。

因此, $(hf(X_1 \cup X_2), \vec{B}_1 \cup \vec{B}_2)$ 是一个概念。

其次, 由于 $X_1, X_2 \subseteq X_1 \cup X_2 \subseteq hf(X_1 \cup X_2)$, 所以 $(hf(X_1 \cup X_2), \vec{B}_1 \cup \vec{B}_2)$ 是 $(X_1, \vec{B}_1)$ 和 $(X_2, \vec{B}_2)$ 的一个上界。

最后, 对于任意 $(X, \vec{B}) \in L(\vec{I})$, 若 $(X_1, \vec{B}_1) \leqslant (X, \vec{B}), (X_2, \vec{B}_2) \leqslant (X, \vec{B})$, 则 $X_1 \subseteq X, X_2 \subseteq X$, 故 $X_1 \cup X_2 \subseteq X$ 。因此, $f(X_1 \cup X_2) \subseteq f(X)$, 于是 $hf(X_1 \cup X_2) \subseteq hf(X)$ 。由于 $hf(X) = X$, 所以 $X \supseteq hf(X_1 \cup X_2)$, 因此, $(hf(X_1 \cup X_2), \vec{B}_1 \cup \vec{B}_2) \leqslant (X, \vec{B})$ 。

综上所述, $(hf(X_1 \cup X_2), \vec{B}_1 \cup \vec{B}_2)$ 是 $(X_1, \vec{B}_1)$ 和 $(X_2, \vec{B}_2)$ 的上确界。证毕。

定理 2 说明, $(L(\vec{I}), \leqslant)$ 是一个完备格, 故称其为经典 - 区间值模糊概念格, 简称概念格。

例 1 表 1 为一个区间值模糊形式背景 $(G, M, \vec{I})$, 其中,

$$G = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, M = \{a, b, c, d, e\},$$

区间值模糊关系 $\vec{I}$ 如表 1 所示, 表 2 为 $L(G, M, \vec{I})$ 的所有概念, 图 1 为概念格 $L(G, M, \vec{I})$ 。

表 1 例 1 中的区间值模糊形式背景 $(G, M, \vec{I})$

Tab. 1 The interval-valued fuzzy formal context $(G, M, \vec{I})$ in Example 1

G/M	a	b	c	d	e
x_1	[0.7, 0.9]	[0.2, 0.5]	[0.2, 0.5]	[0.8, 1.0]	[0.0, 0.3]
x_2	[0.7, 0.9]	[0.8, 0.9]	[0.2, 0.4]	[0.0, 0.1]	[0.7, 1.0]
x_3	[0.2, 0.3]	[0.0, 0.0]	[0.4, 0.7]	[0.4, 0.6]	[0.6, 0.7]
x_4	[0.6, 0.9]	[0.1, 0.2]	[0.4, 0.6]	[0.3, 0.5]	[0.3, 0.6]

表 2 例 1 中 $(G, M, \vec{I})$ 的概念

Tab. 2 The concepts of $(G, M, \vec{I})$ in Example 1

编号	(外延, 内涵)
CF_1	$(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{a^{[0.7, 0.9]}, b^{[0.8, 0.9]}, c^{[0.4, 0.7]}, d^{[0.8, 1.0]}, e^{[0.7, 1.0]}\})$
CF_2	$(\{x_1, x_2, x_4\}, \{a^{[0.7, 0.9]}, b^{[0.8, 0.9]}, c^{[0.4, 0.6]}, d^{[0.8, 1.0]}, e^{[0.7, 1.0]}\})$

续表2

编号	(外延,内涵)
CF_3	$(\{x_1, x_3, x_4\}, \{a^{[0.7,0.9]}, b^{[0.2,0.5]}, c^{[0.4,0.7]}, d^{[0.8,1.0]}, e^{[0.6,0.7]}\})$
CF_4	$(\{x_2, x_3, x_4\}, \{a^{[0.7,0.9]}, b^{[0.8,0.9]}, c^{[0.4,0.7]}, d^{[0.4,0.6]}, e^{[0.7,1.0]}\})$
CF_5	$(\{x_1, x_2\}, \{a^{[0.7,0.9]}, b^{[0.8,0.9]}, c^{[0.2,0.5]}, d^{[0.8,1.0]}, e^{[0.7,1.0]}\})$
CF_6	$(\{x_1, x_4\}, \{a^{[0.7,0.9]}, b^{[0.2,0.5]}, c^{[0.4,0.6]}, d^{[0.8,1.0]}, e^{[0.3,0.6]}\})$
CF_7	$(\{x_2, x_4\}, \{a^{[0.7,0.9]}, b^{[0.8,0.9]}, c^{[0.4,0.6]}, d^{[0.3,0.5]}, e^{[0.7,1.0]}\})$
CF_8	$(\{x_3, x_4\}, \{a^{[0.6,0.9]}, b^{[0.1,0.2]}, c^{[0.4,0.7]}, d^{[0.4,0.6]}, e^{[0.6,0.7]}\})$
CF_9	$(\{x_1\}, \{a^{[0.7,0.9]}, b^{[0.2,0.5]}, c^{[0.2,0.5]}, d^{[0.8,1.0]}, e^{[0.0,0.3]}\})$
CF_{10}	$(\{x_2\}, \{a^{[0.7,0.9]}, b^{[0.8,0.9]}, c^{[0.2,0.4]}, d^{[0.0,0.1]}, e^{[0.7,1.0]}\})$
CF_{11}	$(\{x_3\}, \{a^{[0.2,0.3]}, b^{[0.0,0.0]}, c^{[0.4,0.7]}, d^{[0.4,0.6]}, e^{[0.6,0.7]}\})$
CF_{12}	$(\{x_4\}, \{a^{[0.6,0.9]}, b^{[0.1,0.2]}, c^{[0.4,0.6]}, d^{[0.3,0.5]}, e^{[0.3,0.6]}\})$
CF_{13}	$(\emptyset, \{a^{[0.0,0.0]}, b^{[0.0,0.0]}, c^{[0.0,0.0]}, d^{[0.0,0.0]}, e^{[0.0,0.0]}\})$

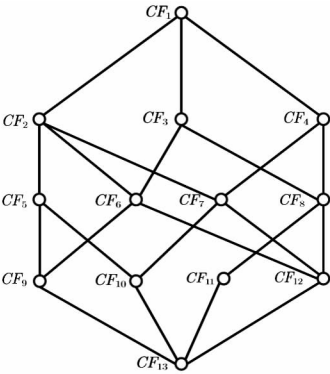


图1 例1中的概念格 $L(G,M,\vec{I})$

Fig. 1 The concept lattice $L(G,M,\vec{I})$ in Example 1

3 区间值模糊形式背景属性约简

定义4 设 $L(G,M_1,\vec{I}_1)$ 和 $L(G,M_2,\vec{I}_2)$ 是两个经典-区间值模糊概念格(简记为 $L(\vec{I}_1)$, $L(\vec{I}_2)$),若对于任何 $(X,\vec{B})\in L(\vec{I}_2)$,都存在 $(Y,\vec{C})\in L(\vec{I}_1)$,使得 $X=Y$,则称 $L(\vec{I}_1)$ 细于 $L(\vec{I}_2)$,记为 $L(\vec{I}_1)\leq L(\vec{I}_2)$ 。若 $L(\vec{I}_1)\leq L(\vec{I}_2)$, $L(\vec{I}_2)\leq L(\vec{I}_1)$,则称 $L(\vec{I}_1)$ 与 $L(\vec{I}_2)$ 同构,记为 $L(\vec{I}_1)\cong L(\vec{I}_2)$ 。

显然, $L(\vec{I}_1)\leq L(\vec{I}_2)$ 等价于 $Ext(\vec{I}_2)\subseteq Ext(\vec{I}_1)$ 。因而, $L(\vec{I}_1)\cong L(\vec{I}_2)$ 等价于 $Ext(\vec{I}_1)=Ext(\vec{I}_2)$ 。

定义5 设 $(G,M,\vec{I})$ 是一个区间值模糊形

式背景,对于非空集合 $N\subseteq M$,称 $(G,N,\vec{I}_N)$ 是 $(G,M,\vec{I})$ 的一个子背景,其中, $\vec{I}_N$ 是 $\vec{I}$ 在 $G\times N$ 上的限制,也就是 $\vec{I}_N$ 是 $G\times N$ 上的区间值模糊集,满足

$$\vec{I}_N(x,a)=\vec{I}(x,a),x\in G,a\in N。$$

在子背景 $(G,N,\vec{I}_N)$ 中,将定义2中算子对应地记为 f_N 和 h_N ,这样定义2中的 f 和 h 也可写成 f_M 和 h_M 。特别地,当 N 只有一个属性 a 时, f_N 和 h_N 也简记为 f_a 和 h_a 。

不难发现, $\forall X\subseteq G,\emptyset\neq N\subseteq M,f_N(X)=f(X)|_N$,这里 $f(X)|_N$ 表示 $f(X)$ 在 N 上的限制。

定理3 设 $(G,M,\vec{I})$ 是一个区间值模糊形式背景,对于非空集合 $N\subseteq M$,有 $L(G,M,\vec{I})\leq L(G,N,\vec{I}_N)$ 。

证明 只需证明,对于任何 $X\in Ext(\vec{I}_N)$,有 $X\in Ext(\vec{I})$,即证 $hf(X)=X$ 。

由定理1可知 $X\subseteq hf(X)$ 。相反, $\forall x\in hf(X)$,有 $x\vec{I}\subseteq f(x)$,两边取在 N 上的限制,得 $x\vec{I}_N\subseteq f(X)|_N=f_N(X)$,即 $x\in h_Nf_N(X)$,故 $hf(X)\subseteq h_Nf_N(X)$ 。由 $(X,\vec{B})\in L(\vec{I}_N)$ 可知, $h_Nf_N(X)=X$,于是有 $hf(X)\subseteq X$ 。

最后,结合 $X\subseteq hf(X)$ 和 $hf(X)\subseteq X$ 得到 $hf(X)=X$ 。证毕。

命题1 设 $(G,M,\vec{I})$ 是一个区间值模糊形式背景,对于非空集合 $C_1,C_2\subseteq M,X\subseteq G$,有

$$h_{C_1\cup C_2}f_{C_1\cup C_2}(X)=h_{C_1}f_{C_1}(X)\cap h_{C_2}f_{C_2}(X)。$$

证明 对于任意 $x \in G$, 有

$$\begin{aligned} x \in h_{c_1 \cup c_2} f_{c_1 \cup c_2}(X) &\Leftrightarrow x \vec{I}_{c_1 \cup c_2} \subseteq f_{c_1 \cup c_2}(X) \\ &\Leftrightarrow x \vec{I}_{c_1} \cup x \vec{I}_{c_2} \subseteq f_{c_1}(X) \cup f_{c_2}(X) \\ &\Leftrightarrow x \vec{I}_{c_1} \subseteq f_{c_1}(X), x \vec{I}_{c_2} \subseteq f_{c_2}(X) \\ &\Leftrightarrow x \in h_{c_1} f_{c_1}(X), x \in h_{c_2} f_{c_2}(X) \\ &\Leftrightarrow x \in h_{c_1} f_{c_1}(X) \cap h_{c_2} f_{c_2}(X), \end{aligned}$$

即 $h_{c_1 \cup c_2} f_{c_1 \cup c_2}(X) = h_{c_1} f_{c_1}(X) \cap h_{c_2} f_{c_2}(X)$ 。

由命题 1 可直接得到推论 1。

推论 1 设 $(G, M, \vec{I})$ 是一个区间值模糊形式背景, 对于非空集合 $C_1, C_2 \subseteq M$, 若 $C_1 \subseteq C_2$, 则 $\forall X \subseteq G, h_{C_2} f_{C_2}(X) \subseteq h_{C_1} f_{C_1}(X)$ 。

定义 6 设 $(G, M, \vec{I})$ 是一个区间值模糊形式背景, 对于非空集合 $N \subseteq M$, 若 $L(G, N, \vec{I}_N) \cong L(G, M, \vec{I})$, 则称 N 是 $(G, M, \vec{I})$ 的一个协调集。若进一步, 对于任何 $a \in N$, 都有 $L(G, N - \{a\}, \vec{I}_{N - \{a\}})$ 不同构于 $L(G, M, \vec{I})$, 则称 N 是 $(G, M, \vec{I})$ 的一个约简。

定义 6 说明, 约简是其概念格与原形式背景的概念格同构的最小属性子集。

定理 4 设 $(G, M, \vec{I})$ 是一个区间值模糊形式背景, 对于非空集合 $N \subseteq M$, 则 N 是一个协调集, 当且仅当 $\forall X \subseteq G, h_N f_N(X) \subseteq hf(X)$ 。

证明 (必要性) 设 N 是一个协调集, 易知 $Ext(\vec{I}_N) = Ext(\vec{I})$ 。 $\forall X \subseteq G$, 由式(3) 得 $hf(X) \in Ext(\vec{I})$, 所以 $hf(X) \in Ext(\vec{I}_N)$, 故 $h_N f_N(hf(X)) = hf(X)$ 。由定理 1 得 $X \subseteq hf(X)$, 依据定理 1 条件 1) 知道 f_N 和 h_N 具有单调性, 故得 $f_N(X) \subseteq f_N(hf(X))$, 进而得 $h_N f_N(X) \subseteq h_N f_N(hf(X))$ 。再根据 $hf(X) \supseteq h_N f_N(hf(X))$, 得到 $h_N f_N(X) \subseteq hf(X)$ 。

(充分性) 设 $\forall X \subseteq G, h_N f_N(X) \subseteq hf(X)$ 。由推论 1 知道 $hf(X) \subseteq h_N f_N(X)$, 故结合假设得 $h_N f_N(X) = hf(X)$ 。最后根据式(3) 可知, $Ext(\vec{I}_N) = Ext(\vec{I})$, 即 N 为一个协调集。证毕。

定理 5 设 $(G, M, \vec{I})$ 是一个区间值模糊形式背景, 对于非空集合 $N \subseteq M$, 则 N 为一个协调集, 当且仅当 $\forall m \in M - N, \exists$ 非空集合 $P \subseteq N$, 使得 $\forall X \subseteq G, h_P f_P(X) \subseteq h_m f_m(X)$ 。

证明 (必要性) 设 N 为一个协调集, 则由定理 4 得 $h_N f_N(X) \subseteq hf(X), X \subseteq G$ 。取 $P = N$, 再由推论 1 得 $h_P f_P(X) = h_N f_N(X) \subseteq hf(X) \subseteq h_m f_m(X)$, 即

$$h_P f_P(X) \subseteq h_m f_m(X), m \in M - N.$$

(充分性) 若对于任意 $m \in M - N$, 存在非空集合 $P \subseteq N$, 使得 $h_P f_P(X) \subseteq h_m f_m(X), X \subseteq G$, 则由推论 1 得 $h_N f_N(X) \subseteq h_P f_P(X) \subseteq h_m f_m(X)$ 。再由 m 的任意性及命题 1 得 $h_N f_N(X) \subseteq h_{M-N} f_{M-N}(X)$ 。由命题 1 得 $hf(X) = h_N f_N(X) \cap h_{M-N} f_{M-N}(X)$, 故 $hf(X) = h_N f_N(X)$ 。由式(3) 得到 $Ext(\vec{I}_N) = Ext(\vec{I})$, 即证得 N 为一个协调集。

证毕。

显然, 区间值模糊形式背景 $(G, M, \vec{I})$ 一定有约简, 也可能有多个约简, 属于每个约简的属性非常重要, 称这样的属性为核心属性。

4 属性约简方法

定义 7 设 $(G, M, \vec{I})$ 是一个区间值模糊形式背景, $(X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2) \in L(\vec{I})$, 令

$$\begin{aligned} DIS((X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2)) = \\ \left\{ \begin{aligned} &m \in M \mid \vec{B}_1(m) \neq \vec{B}_2(m), \\ &X_1 \subset X_2 \text{ 或 } X_2 \subset X_1; \\ &\emptyset, \text{ 否则。} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

称 $DIS((X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2))$ 为 $(X_1, \vec{B}_1)$ 与 $(X_2, \vec{B}_2)$ 差别属性集。称

$$\begin{aligned} DM(\vec{I}) = (DIS((X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2)) \mid \\ (X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2) \in L(\vec{I})) \end{aligned}$$

是 $(G, M, \vec{I})$ 的区间值模糊差别矩阵, 简称差别矩阵。

例 2 对于例 1 中区间值模糊形式背景 $(G, M, \vec{I})$, 根据定义 7 计算出它的所有差别属性集, 表 3 为其差别矩阵。

在表 3 所示的差别矩阵中, 非空差别属性集的表示省略了括号和属性间的分隔符, 如 abc 表示属性集 $\{a, b, c\}$ 。由于差别矩阵具有对称性, 表 3 中仅保留主对角线及其上方元素, 下三角部分已省略。

定理 6 设 $(G, M, \vec{I})$ 是一个区间值模糊形式背景, 对于非空集合 $N \subseteq M$, 则 N 为一个协调集, 当且仅当对于任意非空 $DIS((X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2))$, 有

$$N \cap DIS((X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2)) \neq \emptyset.$$

表3 例1中的区间值模糊形式背景的差别矩阵
Tab.3 The discernibility matrix of the interval-valued fuzzy formal context of Example 1

	CF_1	CF_2	CF_3	CF_4	CF_5	CF_6	CF_7	CF_8	CF_9	CF_{10}	CF_{11}	CF_{12}	CF_{13}
CF_1	$\emptyset$	c	be	c	c	bce	cd	abe	bce	cd	$abde$	M	M
CF_2	$-$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	c	be	d	$\emptyset$	bce	cd	$\emptyset$	$abde$	M
CF_3	$-$	$-$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	ce	$\emptyset$	abd	ce	$\emptyset$	abd	M	M
CF_4	$-$	$-$	$-$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	cd	abe	$\emptyset$	cd	ab	cd	M
CF_5	$-$	$-$	$-$	$-$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	be	cd	$\emptyset$	$\emptyset$	M
CF_6	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	ce	$\emptyset$	$\emptyset$	abe	M
CF_7	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	cd	$\emptyset$	cde	M
CF_8	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	ab	cde	M
CF_9	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	M
CF_{10}	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	M
CF_{11}	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\emptyset$	$\emptyset$	$acde$
CF_{12}	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\emptyset$	M
CF_{13}	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\emptyset$

证明 (必要性) 设 N 为一个协调集, 对于任意 $DIS((X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2)) \neq \emptyset$, 显然 $h_N f_N(X_i) = X_i, i = 1, 2$, 且 $h_N f_N(X_1) \neq h_N f_N(X_2)$, 故 $f_N(X_1) \neq f_N(X_2)$ 。因此存在 $m \in N$, 使得 $(f_N(X_1))(m) \neq (f_N(X_2))(m)$, 由定义 7 可知

$$m \in DIS((X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2)),$$

故 $N \cap DIS((X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2)) \neq \emptyset$ 。

(充分性) 假设对于 $DIS((X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2)) \neq \emptyset$, 都有 $N \cap DIS((X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2)) \neq \emptyset$ 。要证明 N 为协调集, 由定理 3 知道只需证明 $h_N f_N(X) \subseteq hf(X), X \subseteq G$ 。设存在 $X \subseteq G$, 使得 $h_N f_N(X) \not\subseteq hf(X)$, 即一定有 $hf(X) \subset h_N f_N(X)$, 记 $X_1 = hf(X), X_2 = h_N f_N(X)$, 则 $(X_1, f(X_1)), (X_2, f(X_2)) \in L(\vec{I})$, 且 $X_1 \subset X_2$ 。因此, $DIS((X_1, f(X_1)), (X_2, f(X_2))) \neq \emptyset$ 。由假设可知 $N \cap DIS((X_1, f(X_1)), (X_2, f(X_2))) \neq \emptyset$ 。因为 $f(X) = fhf(X) = f(X_1)$, 故 $f_N(X) = f_N(X_1)$ 。由 $f_N(X_2) = f_N(h_N f_N(X)) = f_N h_N f_N(X) = f_N(X)$ 得 $f_N(X_1) = f_N(X_2)$, 即 $\forall m \in N, (f(X_1))(m) = (f(X_2))(m)$,

这与

$N \cap DIS((X_1, f(X_1)), (X_2, f(X_2))) \neq \emptyset$ 相矛盾。因此, $\forall X \subseteq G, h_N f_N(X) \subseteq hf(X)$, 故由定理 4 知道, N 是一个协调集。证毕。

从定理 6 可以看出, 区间值模糊形式背景的约简是与差别矩阵中所有非空差别属性集相交不空的最小属性子集。

定理 7 设 $(G, M, \vec{I})$ 是一个区间值模糊形式背景, 则 $m \in M$ 是一个核心属性, 当且仅当 $\exists (X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2) \in L(\vec{I})$, 使得 $DIS((X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2)) = \{m\}$ 。

证明 (充分性) 设 $DIS((X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2)) = \{m\}$ 。对于 $(G, M, \vec{I})$ 的任意约简 D , 由定理 6 可知, $D \cap DIS((X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2)) \neq \emptyset$ 。这样显然有 $D \cap DIS((X_1, \vec{B}_1), (X_2, \vec{B}_2)) = \{m\}$, 故 $m \in D$ 。由 D 的任意性知道 m 是一个核心属性。

(必要性) 设 m 是一个核心属性, 即对于任意约简 D , 都有 $m \in D$ 。可以肯定 $M - \{m\}$ 不是协调集, 因为若 $M - \{m\}$ 是协调集, 则存在约简 D , 满

足 $D \subseteq M - \{m\}$, 故 $m \notin D$, 这与 m 是一个核心属性相矛盾。由于 $M - \{m\}$ 不是协调集, 所以根据定理 3 知道, 存在 $X \subseteq G$, 使得 $h_{M-\{m\}}f_{M-\{m\}}(X) \not\subseteq hf(X)$, 即一定有 $hf(X) \subset h_{M-\{m\}}f_{M-\{m\}}(X)$ 。记

$X_1 = hf(X), X_2 = h_{M-\{m\}}f_{M-\{m\}}(X)$, 则 $X_1 \subset X_2$, 显然 $(X_1, f(X_1)), (X_2, f(X_2)) \in L(\vec{I})$ 。因为

$f(X_2) \upharpoonright_{M-\{m\}} = f_{M-\{m\}}(X_2) = f_{M-\{m\}}h_{M-\{m\}}f_{M-\{m\}}(X) = f_{M-\{m\}}(X)$, 即 $f_{M-\{m\}}(X_2) = f_{M-\{m\}}(X)$ 。又由 $X_1 = hf(X)$ 得 $f(X_1) = fhf(X)$, 再由 $fhf(X) = f(X)$ 得 $f(X_1) = f(X)$, 故 $f_{M-\{m\}}(X_1) = f_{M-\{m\}}(X)$ 。有 $f_{M-\{m\}}(X_1) = f_{M-\{m\}}(X_2)$, 即对于任意 $a \in M - \{m\}$, 都有 $(f(X_1))(a) = (f(X_2))(a)$ 。又由 $X_1 \subset X_2$ 可得 $f(X_1) \neq f(X_2)$, 否则, 可推出 $X_1 = X_2$, 则有 $(f(X_1))(m) \neq (f(X_2))(m)$, 故得

$$DIS((X_1, f(X_1)), (X_2, f(X_2))) = \{m\}。$$

例 3 根据定理 6, 再利用例 2 中给出的差别矩阵, 可以得到例 1 中形式背景 $(G, M, \vec{I})$ 的所有约简与核心属性。

找出表 3 中全部非空的差别属性集, 可列为 $\{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c, e\}, \{c, d, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}$ 。

由定理 7 可知, c 和 d 是核心属性。由差别属性集 $\{a, b\}$ 可知, 不存在仅含两个属性的约简, 所以每个约简至少包含 3 个属性, 而且必含属性 a 或者属性 b 。

接下来, 考虑属性集 $D_1 = \{a, c, d\}$ 和 $D_2 = \{b, c, d\}$ 。

对于 $D_1 = \{a, c, d\}$, 由定理 6 可知, 只需要考虑差别属性集 $\{b, e\}$, 于是考虑 $E_1 = \{a, c, d, e\}$ 是否为约简。依据定理 6 可以验证, $E_1 = \{a, c, d, e\}$ 是一个协调集, 同时也能肯定它是一个约简。

对于 $D_2 = \{b, c, d\}$, 依据定理 6 可验证, 它是一个协调集, 同时也可确定它是一个约简。综上得到例 1 中的 $(G, M, \vec{I})$ 有两个约简, 分别 $\{a, c, d, e\}$ 和 $\{b, c, d\}$ 。

定义 8 设 $(G, M, \vec{I})$ 是一个区间值模糊形式背景, $DM(\vec{I})$ 是 $(G, M, \vec{I})$ 的差别矩阵, 定义

$$\Delta(\vec{I}) = \bigwedge_{H \in DM(\vec{I}), H \neq \emptyset} (\vee H)。$$

这里把属性集 H 中的每个属性看作一个布尔变量, 仍用属性的符号表示其对应的变量, $\vee H$ 表示 H 中属性对应的布尔变量的析取。称 $\Delta(\vec{I})$ 为 $(G, M, \vec{I})$ 的差别函数。

通过使用布尔运算的吸收律和分配律可以将差别函数 $\Delta(\vec{I})$ 转化为极小析取式, 利用定理 6 可证明定理 8 成立。

定理 8 设 $(G, M, \vec{I})$ 是一个区间值模糊形式背景, $\Delta(\vec{I})$ 是 $(G, M, \vec{I})$ 的差别函数, 若 $\Delta(\vec{I})$ 的极小析取式为 $(\wedge D_1) \vee (\wedge D_2) \vee \cdots \vee (\wedge D_k)$, 则属性集 $D_1, D_2, \cdots, D_k$ 是 $(G, M, \vec{I})$ 的全部约简。

例 4 利用表 3 中的差别矩阵, 结合定义 8 可以得出例 1 中形式背景 $(G, M, \vec{I})$ 的差别函数 $\Delta(\vec{I})$ 为

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{I}) &= c \wedge d \wedge (a \vee b) \wedge (b \vee e) \wedge \\ &\quad (c \vee e) \wedge (c \vee d) \wedge (c \vee d) \wedge \\ &\quad (a \vee b \vee d) \wedge (a \vee b \vee e) \wedge \\ &\quad (a \vee d \vee e) \wedge (b \vee c \vee e) \wedge \\ &\quad (c \vee d \vee e) \wedge (a \vee b \vee d \vee e) \wedge \\ &\quad (a \vee c \vee d \vee e) \wedge \\ &\quad (a \vee b \vee c \vee d \vee e) = \\ &= c \wedge d \wedge (a \vee b) \wedge (b \vee e) = \\ &= c \wedge d \wedge [b \vee (a \wedge e)] = \\ &= (b \wedge c \wedge d) \vee (a \wedge c \wedge d \wedge e)。 \end{aligned}$$

可以发现, $(b \wedge c \wedge d) \vee (a \wedge c \wedge d \wedge e)$ 是极小析取式, 根据定理 8 可知, 形式背景 $(G, M, \vec{I})$ 共有两个约简, 它们是 $\{b, c, d\}$ 和 $\{a, c, d, e\}$ 。这个结果与例 3 中的结果一致。

取 $N = \{b, c, d\}$, 区间值模糊形式背景 $(G, N, \vec{I}_N)$ 如表 4 所示, 它的所有概念列于表 5 中, 图 2 为概念格 $L(G, N, \vec{I}_N)$ 。

对照表 5 和表 3, 或者对照图 1 和图 2, 可以发现, $L(G, N, \vec{I}_N) \cong L(G, M, \vec{I})$, 但是在 $L(G, N, \vec{I}_N)$ 中概念的内涵表示中只用到 3 个属性, 说明 $L(\vec{I}_N)$ 中概念的表示比 $L(G, M, \vec{I})$ 中概念的表示要简单。

表 4 例 4 中的区间值模糊子背景 $(G,N,\vec{I}_N)$

Tab. 4 The interval-valued fuzzy sub-context $(G,N,\vec{I}_N)$ of Example 4

G/N	b	c	d
x_1	$[0.2,0.5]$	$[0.2,0.5]$	$[0.8,1.0]$
x_2	$[0.8,0.9]$	$[0.2,0.4]$	$[0.0,0.1]$
x_3	$[0.0,0.0]$	$[0.4,0.7]$	$[0.4,0.6]$
x_4	$[0.1,0.2]$	$[0.4,0.6]$	$[0.3,0.5]$

表 5 例 4 中区间值模糊子背景 $(G,N,\vec{I}_N)$ 的全部概念

Tab. 5 All the concepts of interval-valued fuzzy sub-context $(G,N,\vec{I}_N)$ of Example 4

编号	(外延,内涵)
CF'_1	$(\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\{b^{[0.8,0.9]},c^{[0.4,0.7]},d^{[0.8,1.0]}\})$
CF'_2	$(\{x_1,x_2,x_4\},\{b^{[0.8,0.9]},c^{[0.4,0.6]},d^{[0.8,1.0]}\})$
CF'_3	$(\{x_1,x_3,x_4\},\{b^{[0.2,0.5]},c^{[0.4,0.7]},d^{[0.8,1.0]}\})$
CF'_4	$(\{x_2,x_3,x_4\},\{b^{[0.8,0.9]},c^{[0.4,0.7]},d^{[0.4,0.6]}\})$
CF'_5	$(\{x_1,x_2\},\{b^{[0.8,0.9]},c^{[0.2,0.5]},d^{[0.8,1.0]}\})$
CF'_6	$(\{x_1,x_4\},\{b^{[0.2,0.5]},c^{[0.4,0.6]},d^{[0.8,1.0]}\})$
CF'_7	$(\{x_2,x_4\},\{b^{[0.8,0.9]},c^{[0.4,0.6]},d^{[0.3,0.5]}\})$
CF'_8	$(\{x_3,x_4\},\{b^{[0.1,0.2]},c^{[0.4,0.7]},d^{[0.4,0.6]}\})$
CF'_9	$(\{x_1\},\{b^{[0.2,0.5]},c^{[0.2,0.5]},d^{[0.8,1.0]}\})$
CF'_{10}	$(\{x_2\},\{b^{[0.8,0.9]},c^{[0.2,0.4]},d^{[0.0,0.1]}\})$
CF'_{11}	$(\{x_3\},\{b^{[0.0,0.0]},c^{[0.4,0.7]},d^{[0.4,0.6]}\})$
CF'_{12}	$(\{x_4\},\{b^{[0.1,0.2]},c^{[0.4,0.6]},d^{[0.3,0.5]}\})$
CF'_{13}	$(\emptyset,\{b^{[0.0,0.0]},c^{[0.0,0.0]},d^{[0.0,0.0]}\})$

5 结语

本文将模糊粗糙近似方法用于模糊概念分析,在区间值模糊形式背景中提出一种经典-区间值模糊概念格。在保持概念格结构不变的要求下,给出属性约简的判定方法,同时依据提出的差别矩阵给出一种约简计算方法。不同属性在不同约简中所起的作用不同,属性的分类和特征刻画,以及它在知识发现中的作用是我们今后研究的一个问题。

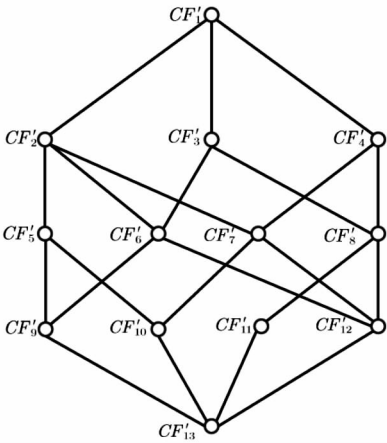


图 2 例 4 中的概念格 $L(\vec{I}_N)$

Fig. 2 The concept lattice $L(\vec{I}_N)$ of Example 4

参考文献

- [1] GANTER B, WILLE R. Formal concept analysis[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [2] BURUSCO A, FUENTES-GONZALEZ R. The study of the L -fuzzy concept lattice[J]. Mathware & Soft Computing, 1994, 1(3): 209-218.
- [3] DJOUADI Y, PRADE H. Interval-valued fuzzy formal concept analysis[C]//Foundations of Intelligent Systems. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009: 592-601.
- [4] LI L F. Multi-level interval-valued fuzzy concept lattices and their attribute reduction[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2017, 8(1): 45-56.
- [5] 张文修,魏玲,祁建军. 概念格的属性约简理论与方法[J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2005, 35(6): 628-639.
ZHANG W X, WEI L, QI J J. Theory and method of attribute reduction for concept lattices[J]. Science in China Series E: Information Science, 2005, 35(6): 628-639.
- [6] 吴克生. 区间形式背景分析[D]. 西安: 西北大学, 2011.
- [7] 杨建峰,魏玲. 基于差别矩阵的区间值形式背景属性约简[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2012, 42(3): 365-369.
YANG J F, WEI L. Interval valued formal context attribute reduction based on difference matrix[J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2012, 42(3): 365-369.
- [8] 黄艳,任苗苗,魏玲. 区间值决策形式背景的属性值向量约简[J]. 计算机科学, 2012, 39(1): 193-197.
HUANG Y, REN M M, WEI L. Attribute value vector reduction for formal contexts of interval-valued decision[J]. Computer Science, 2012, 39(1): 193-197.
- [9] 王虹,崔聘芝. 协调区间值决策形式背景的知识约简[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(9): 265-273.
WANG H, CUI P Z. Knowledge reduction in formal background of coordinated interval valued decision making[J]. Mathematics in Practice and Understanding, 2014, 44(9): 265-273.
- [10] KRAJIC S. Cluster based efficient generation of fuzzy concepts[J]. Neural Network World, 2003, 13(5): 521-530.
- [11] YAHIA S B, JAOUA A. Discovering knowledge from fuzzy concept lattice[C]//Data Mining and Computational Intelligence. Heidelberg: Physica-Verlag, 2001: 167-190.
- [12] DUNTSCH N, GEDIGA G. Modal-style operators in qualitative data analysis[C]//Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Data Mining. Maebashi, Japan: IEEE Computer Society, 2002: 155-162.
- [13] YAO Y Y. Concept lattices in rough set theory[C]//Proceedings of 2004 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information. Banff, AB, Canada: IEEE Computer Society, 2004: 796-801.
- [14] LI T J, WANG Y Q. Crisp-fuzzy concept lattice based on interval-valued fuzzy sets[C]//International Joint Conference on Rough Sets. Cham: Springer Nature Switzerland, 2023: 449-462.
- [15] 吴伟志. 粗糙近似算子的公理化刻画: 综述[J]. 模式识别与人工智能, 2017, 30(2): 137-151.
WU W Z. Rough approximation operator of axiomatic characterization: Review[J]. Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2017, 30(2): 137-151.
- [16] AKRAM M, DUDEK W A. Interval-valued fuzzy graphs[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2011, 61(2): 289-299.
- [17] BURUSCO A, FUENTES-GONZALEZ R. The study of the interval-valued contexts[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 121(3): 439-452.
- [18] 吴明瑞. 基于粗糙近似的经典: 模糊概念格的属性约简研究[D]. 舟山: 浙江海洋大学, 2023.

(编辑 张 欢)