



多分知识结构的基与交式生成组

孙文^{1,2}, 李进金^{1,2}, 林艺东^{1,2}, 黄晓丽^{1,2}

1. 闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000; 2. 福建省粒计算及其应用重点实验室, 福建 漳州 363000

摘要 在多分知识结构理论中, 每个问题可以有不同的响应值, 个体对问题的回答反映了个体对知识的理解水平。多分知识空间可由它的基来刻画, 多分闭包空间可由其极小交式生成组来表示。问题不同响应值的多分知识空间的基由它的原子组成, 而多分闭包空间的极小交式生成组由其所有交式生成子构成。基于问题不同响应值的多分知识结构对个体进行知识评价, 可以通过测试部分问题评价出个体的多分知识状态, 从而对个体进行学习指导。

关键词 多分知识空间; 多分闭包空间; 基; 交式生成组; 知识评价

中图分类号: TP182 **DOI**: 10. 16152/j. cnki. xdxzbzr. 2026-03-014

Bases and intersection generation groups of polytomous knowledge structures

SUN Wen^{1,2}, LI Jinjin^{1,2}, LIN Yidong^{1,2}, HUANG Xiaoli^{1,2}

1. School of Mathematics and statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China;

2. Fujian Key Laboratory of Granular Computing and Applications, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China

Abstract In polytomous KST, each item can be assigned a different response scale, and the individual's answer to items reflects the individual's understanding level of knowledge. The polytomous knowledge space can be described by its basis, and the polytomous closure space can be represented by its minimal intersection generation group. The basis of a polytomous knowledge space based on different response scales is composed of its atoms, while the minimal intersection generation group of a polytomous closure space is composed of all intersection generators. Based on polytomous knowledge structures of different response scales of items, the polytomous knowledge state of an individual can be evaluated in the finite steps of item tests. Based on polytomous knowledge structures of different response scales of items, the polytomous knowledge state of an individual can be evaluated by testing some items so as to guide learning of individuals.

Keywords polytomous knowledge space; polytomous closure space; basis; intersection generation group; knowledge assessment

收稿日期: 2026-01-30 修回日期: 2026-02-17

基金项目: 国家自然科学基金(12301585); 福建省自然科学基金(2023J05175, 2024J08207); 福建省教育厅科学研究基金(JAT220213)。

第一作者: 孙文, 男, 讲师, 硕士生导师, 从事知识结构、认知诊断、模糊集理论等研究, wsun0907@126.com。

通信作者: 李进金, 男, 教授, 博士生导师, 从事概念格、拓扑学、知识结构等研究, jinjinlimnu@126.com。

奥苏贝尔的有意义学习理论强调个体原有认知结构的重要性,并认为“个体已经知道了什么”是影响个体学习的重要因素^[1]。从数学学习心理角度看,数学概念具有发展的抽象性、表征的多元性、理解的层次性、联结的系统性等特征。优良的认知结构是数学知识理解的基础,有助于知识的贮存和提取,有助于迁移的产生,并与个体自我监控和问题解决能力有密切联系等^[2]。因此,准确评价出个体已经知道了什么,全面、清楚的认识个体的认知结构是个体下一步学习及教师教学的关键。然而,传统的评价是基于经典测试理论(classical test theory, CTT),通过多次平行测试用个体的分数来刻画内在的能力。显然,这种用分数来刻画个体能力的评价是不够全面的^[3]。同时,个体数学知识内化所形成的数学认知结构,其内隐性为评价带来困难。

知识空间理论(knowledge space theory, KST)是由美国数学心理学家 Falmagne 和比利时数学心理学家 Doignon 于 1985 年提出的一种数学理论^[4]。KST 通过分析学生对某知识域上不同水平的一系列有关问题解答情况来确定学生的知识状态。进而,根据外在表现的知识状态,诊断出个体的能力状态,评价个体在不同知识中的认知水平,并为个体的下一步学习作指导^[5-6]。在 KST 中,要对个体进行知识评价,需要构建两个结构,一个是外在表现的知识结构,一个是内在的能力结构,因此,KST 可看成是对奥苏贝尔认知结构的具体描述。显然,KST 是基于结构的评价,这种评价不仅仅依赖于测试的分数,KST 是 CTT 理论的发展和完善。近年来,关于 KST 的研究在国内取得了重要的进展^[7-14]。

二分 KST 中个体对问题的回答只是完全正确或错误,而没考虑个体对问题的部分回答的情况。这在对于客观问题的回答,如选择题、填空题等时是有效的。但在对主观问题,如解答题,需体现个体对问题部分解决时是有局限的。同时,有些问题,如心理评价与社会科学等中的问题个体很难用“是”或者“否”来回答^[15-16]。因此,有些学者将二分 KST 推广到多分的情形。1997 年 Schrepp 首先研究了在线性序下的多分知识结构^[17]。2011 年 Bartl 和 Belohlavek^[18]研究了完全剩余格下的分级知识状态。2020 年 Stefanutti 等人研究了问题响应值是格的多分知识结构^[19]。Heller 在 2021 年研究了响应值是完备格的多分

知识结构,并研究了问题不同响应值的多分知识结构^[20]。2023 年,Sun 等人从模糊技能和良级的角度研究了多分知识结构^[21-22]。2025 年,Xu 和 Wang 等人分别从粗糙集理论中的 L-模糊近似算子和 L-模糊 S-近似算子讨论了多分知识结构的构造^[23-24]。Zhou 等人从概念认知学习的角度研究了基于多分问题上的模糊技能函数的技能评估方法^[25]。

在实际的数学教学中,问题的响应值往往有不同的情形。比如问题 A“你对指数函数学习是否有兴趣”,对此问题回答的响应值可采用李克特量表表示为“非常有兴趣”“有兴趣”“一般”“没兴趣”“非常没兴趣”。问题 B“ $\frac{8}{9} - \frac{2}{9}$ ”,其解题过程为

$\frac{8}{9} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9} \cdots \cdots 1$ 分,理解同分母减法;
$\frac{8}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{3} \cdots \cdots 2$ 分,理解分数化简。

对此问题回答的响应值可以用集合 $\{0,1,2\}$ 来表示。因此,问题不同响应值的多分知识结构是数学教与学过程中经常会遇到的。结合 Stefanutti、Heller、Sun 等人的工作,本文研究由部分子集族来刻画问题不同响应值的多分知识结构。在 KST 中,存在两种常见的多分知识结构:一种是多分知识空间,另一种是多分闭包空间。多分知识空间满足逐点并封闭性,用教育心理学的术语即两个体相互交流后,他们的多分知识状态可达到两个多分知识状态的并。多分闭包空间满足逐点交封闭性,用教育心理学的术语即两个多分知识状态的交,就是这两个个体的共同基础。基于多分知识空间的逐点并封闭性及多分闭包空间的逐点交封闭性,可以用它们的子集族来刻画这两类多分知识结构。

本文旨在研究问题不同响应值的多分知识结构的基与交式生成组。文章第 1 节介绍多分知识结构理论的基本概念,第 2 节主要讨论多分知识空间的基及寻找基的方法。第 3 节介绍多分闭包空间的交式生成组及生成极小交式生成组的方法,第 4 节讨论基于问题不同响应值的知识评价,第 5 节对文章进行总结。

1 多分 KST 的基本概念

在 KST 中,某领域的知识可以用问题来表

示,这些问题组成的集合称为问题域,记为 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, 其中 $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示问题。

设 Q 为问题集, $\mathcal{K} \subseteq 2^Q$, 如果 $\emptyset \in \mathcal{K}, Q \in \mathcal{K}$, 则称 $(Q, \mathcal{K})$ 为知识结构。 $\mathcal{K}$ 中的元素称为知识状态, 表示在理想情况下个体能解决的 Q 中问题子集, 理想状态指个体对问题的回答避免粗心大意错误或幸运猜测正确。

关于 KST 的背景可以参考 Falmagne 和 Doignon 的相关著作和研究^[5-6]。下面介绍格与多分知识状态的有关概念。

设 $(L, \leq)$ 是一个偏序集, 对任意的 $u, v \in L$, $u \vee v$ 表示 $\{u, v\}$ 的上确界, $u \wedge v$ 表示 $\{u, v\}$ 的下确界, 如果对任意的 $u, v \in L, u \vee v \in L$ 且 $u \wedge v \in L$, 则称 $(L, \leq)$ 是一个格。如果对任意的 $G \subseteq L, \sup G = u$ 蕴含 $u \in G$, 则称 u 是不可约元, 其中 $\sup G$ 是 G 的上确界, 偏序集 $(L, \leq)$ 的所有不可约元记为 L^+ 。在偏序集 $(L, \leq)$ 中, 记 $u = v$ 当且仅当 $u \leq v$ 且 $v \leq u, u < v$ 当且仅当 $u \leq v$ 且 $u \neq v$ 。

定义 1^[26] 设 $\mathcal{A} = \{A_i \subseteq E: i \in I\}$, 其中 I 是指标集, E 是一个集合, $X \subseteq E$, 如果存在双射 $\psi: X \rightarrow I$, 使得对任意的 $x \in X$, 有 $x \in A_{\psi(x)}$, 则称 X 是 $\mathcal{A}$ 关于集合 E 的一个截面集。

记 $Q \times L_p = \bigcup_{p \in Q} \{p\} \times L_p$, 设 $X \subseteq Q \times L_p$, 满足 $|X| = |Q|$ 且 $\forall p^v, q^w \in X$ 有 $p \neq q$ 。定义映射 $\psi: X \rightarrow Q$, 使得对任意的 $p^v \in X$ 有 $\psi(p^v) = p$, 则 $\psi: X \rightarrow Q$ 是双射, 且 $p^v \in \{\psi(p^v)\} \times L_{\psi(p^v)}$ 。则 X 是集族 $\{\{p\} \times L_p: p \in Q\}$ 关于 $Q \times L_p$ 的一个截面集。 $\{\{p\} \times L_p: p \in Q\}$ 关于 $Q \times L_p$ 的所有截面集记为 L_p^Q , 并且对任意的 $X \in L_p^Q$, 及任意的 $p^v \in X$, 记 $X(p) = v$ 。

例 1 设问题集 $Q = \{a, b, c\}$, 问题 a, b, c 的响应值集合分别为 $L_a = \{0, 1, 2, 3\}, L_b = \{0, 1\}, L_c = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 对集合 L_a 赋予偏序 $0 \leq_a 1, 2 \leq_a 3, L_b$ 赋予偏序 $0 \leq_b 1, L_c$ 赋予偏序 $0 \leq_c 1 \leq_c 2 \leq_c 4$ 且 $0 \leq_c 3 \leq_c 4$ 。则对问题 a , 有 $a \times L_a = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (a, 3)\}$, 对问题 b , 有 $b \times L_b = \{(b, 0), (b, 1)\}$, 对问题 c , 有 $c \times L_c = \{(c, 0), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4)\}$ 。因此, $Q \times L_p = \bigcup_{p \in Q} \{p\} \times L_p = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4)\}$ 。进而, $\{\{p\} \times L_p: p \in Q\} = \{\{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (a, 3)\}, \{(b, 0), (b, 1)\}, \{(c, 0), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4)\}\}$ 。取 $X = \{(a,$

$2), (b, 1), (c, 3)\}$, 则 X 是 $\{\{p\} \times L_p: p \in Q\}$ 关于 $Q \times L_p$ 的一个截面集。此时, 双射 $\psi: X \rightarrow Q$ 为 $\psi(a, 2) = a, \psi(b, 1) = b, \psi(c, 3) = c$ 。用类似的方法, 本例中 $\{\{p\} \times L_p: p \in Q\}$ 关于 $Q \times L_p$ 的一个截面集共有 40 个, 这里不再一一列举。

设非空集族 $\mathcal{K} \subseteq L_p^Q$, 对任意 $K, T \in \mathcal{K}$, 在 $\mathcal{K}$ 上按问题逐点的方式定义偏序集 $\sqsubseteq$ 满足: $K \sqsubseteq T$ 当且仅当对任意的 $p \in Q$, 有 $K(p) \leq_p T(p)$ 。进一步, $K = T$ 当且仅当 $K \sqsubseteq T$ 且 $T \sqsubseteq K, K \sqsubset T$ 当且仅当 $K \sqsubseteq T$, 且 $K \neq T$ 。

在实际的教学与学习过程中, 代表知识的问题集都是有限的, 因此, 本文的问题集 Q , 以及对任意的 $p \in Q$, 其响应值构成的偏序集 $(L_p, \leq_p)$ 都是有限集。

2 多分知识空间的基与原子

本节考虑基于问题不同响应值的多分知识空间的子集生成方式。

定义 2^[20] 设 Q 是问题集, 对每一个 $p \in Q$, $(L_p, \leq_p)$ 是一个格, 顶元为 $\top_p$, 底元为 $\perp_p$ 。如果 $\mathcal{K} \subseteq L_p^Q, \{p^{\top_p}: p \in Q\} \in \mathcal{K}, \{p^{\perp_p}: p \in Q\} \in \mathcal{K}$ 并且 $\bigcup \mathcal{K} = Q \times L_p$ 成立, 则称 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 为多分知识结构, $\mathcal{K}$ 中的元素 K 称为多分知识状态。

注 1 定义 2 中的多分知识结构和多分知识状态是基于问题可以存在不同响应值集合的情形, 这样的定义具有一般性, 并且符合教育的实际情况。这样, 每个问题响应值集合相同的多分知识与状态就是定义 2 的特殊情形。

记法 1 设 $K, T \in L_p^Q$, 记 $L = \bigcup_{p \in Q} L_p$, 定义运算。

1) $K \uplus T: Q \rightarrow L$, 满足对任意的 $p \in Q$ 有 $K \uplus T(p) = K(p) \vee_p T(p)$;

2) $K \pitchfork T: Q \rightarrow L$, 满足对任意的 $p \in Q$ 有 $K \pitchfork T(p) = K(p) \wedge_p T(p)$ 。

定义 3 设 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 为一个多分知识结构。对任意的 $K, T \in \mathcal{K}$, 如果 $K \uplus T \in \mathcal{K}$, 则称 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 是多分知识空间, 如果 $K \pitchfork T \in \mathcal{K}$, 则称 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 是多分闭包空间。

一般也称定义 3 中的多分知识空间满足逐点并封闭, 多分闭包空间满足逐点交封闭。

定义 4 设 $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \subseteq L_p^Q$, 如果 $\mathcal{F} = \{\uplus \mathcal{A}: \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}'\}$, 则称 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}'$ 的张成, 记作 $\mathcal{S}(\mathcal{F}') = \mathcal{F}$ 。

注 2 对于任何多分知识空间 $(Q, L_p, \mathcal{K})$,

都存在 $\mathcal{K}$ 的一个子集族,使得 $\mathcal{K}$ 可以表示为该子集族的张成。这样的子集族可以充分的表征 $\mathcal{K}$ 。现在考虑问题不同响应值的多分知识空间的基与原子。

定义 5 设 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 是一个多分知识空间, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}$ 。如果 $\mathcal{B}$ 满足:

- 1) $\mathcal{S}(\mathcal{B}) = \mathcal{K}$;
- 2) 对于任意的 $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{K}$, $\mathcal{S}(\mathcal{B}') = \mathcal{K}$ 且 $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ 蕴含 $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ 。则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{K}$ 的基。

显然,定义 5 表明, $\mathcal{K}$ 的基是能张成 $\mathcal{K}$ 的关于集合包含关系的极小子集族。如果 $\mathcal{B}$ 是多分知识空间 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 的基,则对任意的 $K \in \mathcal{B}$, 不存在 $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \setminus \{K\}$, 使得 $K = \mathbb{U} \mathcal{B}'$ 。我们有以下结论:

命题 1 设 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 是一个多分知识空间, $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{K}$ 的基, 如果存在 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$, 使得 $\mathcal{S}(\mathcal{F}) = \mathcal{K}$, 则 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ 。由此, $\mathcal{K}$ 有唯一的基。

证明 假设 $K \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{F}$, 则存在 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ 使得 $K = \mathbb{U} \mathcal{H}$ 。又因为 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{K}$ 的基, 则对任意的 $H \in \mathcal{H}$ 都存在 $\mathcal{B}_H \subseteq \mathcal{B}$, 使得 $H = \mathbb{U} \mathcal{B}_H$ 。则 $K = \mathbb{U}_{H \in \mathcal{H}} (\mathbb{U} \mathcal{B}_H)$, 这意味着存在 $\mathcal{H}' = \{\cup \mathcal{B}_H \mid H \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{B} \setminus \{K\}$, 使得 $K = \mathbb{U} \mathcal{H}'$, 则 $\mathcal{S}(\mathcal{B} \setminus \{K\}) = \mathcal{K}$ 。又因为 $\mathcal{B} \setminus \{K\} \subseteq \mathcal{B}$, 则 $\mathcal{B} \setminus \{K\} = \mathcal{B}$, 矛盾。因此, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ 。又因为 $\mathcal{K}$ 是有限的, 则必然存在 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}$ 使得 $\mathcal{S}(\mathcal{B}) = \mathcal{K}$, 且 $\mathcal{B}$ 是关于集合包含关系的极小子集族。假设 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 都是 $\mathcal{K}$ 的基, 则有 $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ 和 $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1$, 因此 $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$, 即 $\mathcal{K}$ 有唯一的基。证毕。

命题 1 表明每个多分知识空间都存在唯一的基, 一个自然的问题是, 怎样得到该多分知识空间的基。

定义 6 设 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 是一个多分知识结构, 对任意的 $p \in Q, v \in L_p \setminus \{\perp_p\}$, 一个多分知识状态 $K \in \mathcal{K}$ 称为是在 p^v 的极小多分知识状态, 如果 K 满足以下两个条件:

- 1) $p^v \in K$;
- 2) 对任意的 $K' \in \mathcal{K}$, 如果 $p^v \in K'$ 且 $K' \sqsubseteq K$ 则 $K = K'$ 。

记法 2 设 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 是一个多分知识结构, $\mathcal{K}$ 在 p^v 的所有极小多分知识状态记为 $\mathcal{M}_{p^v}$ 。进而, $\mathcal{K}$ 的所有极小多分知识状态记为 $\mathcal{M}_K = \{K: K \in \mathcal{M}_{p^v}, p \in Q, v \in L_p \setminus \{\perp_p\}\}$ 。

定义 7 设 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 是一个多分知识空间, 一个多分知识状态 $K \in \mathcal{K}$ 称为在 p^v 处的原

子, 如果 $p^v \in K$ 且不存在 $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{M}_K \setminus \{K\}$, 使得 $K = \mathbb{U} \mathcal{B}'$ 。

记法 3 设 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 是一个多分知识空间, 对任意的 $p \in Q, v \in L_p \setminus \{\perp_p\}$, p^v 处所有原子的集合记为 δ_{p^v} , 进而问题 p 的原子记为 $\delta_p = \cup_{v \in L_p \setminus \{\perp_p\}} \delta_{p^v}$ 。

我们有以下结论:

定理 1 设 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 是一个多分知识空间, $\mathcal{B}$ 是 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 的基, 则 $\mathcal{B} = \cup_{p \in Q} \delta_p$ 。

证明 假设存在 $K \in \mathcal{B}$, 但 $K \notin \cup_{p \in Q} \delta_p$, 则对任意的 $p \in Q$, 有 $K \notin \delta_p$, 于是对任意的 $v \in L_p \setminus \{\perp_p\}$, 有 $K \notin \delta_{p^v}$ 。令 $K(p) = v_p$, 则可选择 $K_{p^v p} \in K$, 使得 $p^v \in \mathcal{K}_{p^v p} \sqsubseteq K$ 。因此, $K = \mathbb{U}_{p \in Q} K_{p^v p}$, 这与基的定义矛盾, 因此 $\mathcal{B} \subseteq \cup_{p \in Q} \delta_p$ 。反之任取 $K \in \cup_{p \in Q} \delta_p$, 则存在 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, 使得 $K = \mathbb{U} \mathcal{F}$ 。因此, 根据原子定义有 $K \in \mathcal{F}$, 进而 $K \in \mathcal{B}$ 。综上, $\mathcal{B} = \cup_{p \in Q} \delta_p$ 。证毕。

例 2 取与例 1 中相同问题域以及每个问题对应的偏序集合。考虑多分知识结构 $\mathcal{K} = \{000, 100, 011, 111, 210, 300, 102, 201, 112, 301, 004, 310, 211, 113, 311, 203, 302, 104, 014, 114, 204, 213, 312, 303, 214, 313, 304, 314\}$, 容易验证 $\mathcal{K}$ 是多分知识空间。在 a^1 处的所有极小多分知识状态为 $\mathcal{M}_{a^1} = \{100\}$, 在 b^1 处的所有极小多分知识状态为 $\mathcal{M}_{b^1} = \{011, 210, 113\}$, 在 c^1 处的所有极小多分知识状态为 $\mathcal{M}_{c^1} = \{011, 201\}$, 在 a^2 处的所有极小多分知识状态为 $\mathcal{M}_{a^2} = \{201, 210, 203\}$, 在 c^2 处的所有极小多分知识状态为 $\mathcal{M}_{c^2} = \{102\}$, 在 a^3 处的所有极小多分知识状态为 $\mathcal{M}_{a^3} = \{300\}$, 在 c^3 处的所有极小多分知识状态为 $\mathcal{M}_{c^3} = \{113, 203\}$, 在 c^4 处的所有极小多分知识状态为 $\mathcal{M}_{c^4} = \{004\}$ 。因此, 在 a^1 处的所有原子为 $\delta_{a^1} = \{100\}$, 在 b^1 处的所有原子为 $\delta_{b^1} = \{011, 210, 113\}$, 在 c^1 处的所有原子为 $\delta_{c^1} = \{011, 201\}$, 在 a^2 处的所有原子为 $\delta_{a^2} = \{201, 210, 203\}$, 在 c^2 处的所有原子为 $\delta_{c^2} = \{102\}$, 在 a^3 处的所有原子为 $\delta_{a^3} = \{300\}$, 在 c^3 处的所有原子为 $\delta_{c^3} = \{113, 203\}$, 在 c^4 处的所有原子为 $\delta_{c^4} = \{004\}$ 。因此去掉重复元可得, $\cup_{p \in Q} \delta_p = \{100, 011, 210, 201, 102, 300, 004, 113, 203\}$, 该集族即为多分知识空间 $\mathcal{K}$ 的基。由基张成整个多分知识空间的过程如表 1 所示, 右列中所有状态构成的集族就是 $\mathcal{K}$ 。

表 1 由基张成多分知识空间

Tab.1 Spanning polytomous knowledge space from the basis

原子	000
100	100
011	011,111
210	210,310,211,311
201	201,301
102	102,112,312,303
300	300,302
113	113,114,313,314
203	203,214,213,204,304
004	004,104,014

3 多分闭包空间的交式生成组

现在考虑基于问题不同响应值的多分闭包空间的子集生成方式。

定义 8 设 $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \subseteq L_p^Q$, 如果对于任意的 $F \in \mathcal{F}$ 都存在 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}'$ 使得 $F = \bigcap \mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{F}'$ 是 $\mathcal{F}$ 的交式生成组, 记作 $\mathbb{I}(\mathcal{F}') = \mathcal{F}$ 。

定义 9 设 $\mathcal{F} \subseteq L_p^Q$, $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{F}$ 的交式生成组, 如果对于任意的 $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{F}, \mathbb{I}(\mathcal{A}') = \mathcal{F}$ 且 $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ 蕴含 $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, 则称 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{F}$ 的极小交式生成组。

显然, 定义 9 的极小性表明, 如果 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{F}$ 的极小交式生成组, 则对任意的 $A \in \mathcal{A}$, 不存在 $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A} \setminus \{A\}$, 使得 $A = \bigcap \mathcal{A}'$ 。关于极小交式生成组, 我们有以下结论:

命题 2 设 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 是一个多分闭包空间, $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{K}$ 的极小交式生成组。如果存在 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$, 使得 $\mathbb{I}(\mathcal{F}) = \mathcal{K}$, 则 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ 。由此, $\mathcal{K}$ 有唯一的极小交式生成组。

证明 假设 $K \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}$, 则存在 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ 使得 $K = \bigcap \mathcal{H}$ 。又因为 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{K}$ 的极小交式生成组, 则对任意的 $H \in \mathcal{H}$, 都存在 $\mathcal{A}_H \subseteq \mathcal{A}$ 使得 $H = \bigcap \mathcal{A}_H$ 。则 $K = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} (\bigcap \mathcal{A}_H)$, 这意味着存在 $\mathcal{H}' = \{\bigcup \mathcal{A}_H \mid H \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{A} \setminus \{K\}$ 使得 $K = \bigcap \mathcal{H}'$, 这与 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{K}$ 的极小交式生成组矛盾。因此, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ 。因为 $\mathcal{K}$ 是有限的, 则必然存在 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}$ 使得 $\mathbb{I}(\mathcal{A}) = \mathcal{K}$,

且 $\mathcal{A}$ 是关于集合包含关系的极小子集族。假设 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 都是 $\mathcal{K}$ 的极小交式生成组, 则有 $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ 和 $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_1$, 因此 $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, 即 $\mathcal{K}$ 有唯一的极小交式生成组, 证毕。

命题 2 表明对任意多分闭包空间, 存在唯一的极小交式生成组, 一个自然的问题是, 怎样得到该多分闭包空间的极小交式生成组。

定义 10 设 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 是一个多分知识结构, 对任意的 $p \in Q, v \in L_p$, 一个多分知识状态 $K \in \mathcal{K}$ 被称为是 p^v 的极大多分知识状态, 如果 K 满足以下两个条件:

- 1) $p^v \in K$;
- 2) 对任意的 $K' \in \mathcal{K}$, 如果 $p^v \in K'$ 且 $K \sqsubseteq K'$ 则 $K = K'$ 。

记法 4 设 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 是一个多分知识结构, $\mathcal{K}$ 在 p^v 处的所有极大多分知识状态记为 $\mathcal{W}_{p^v}$ 。进而, $\mathcal{K}$ 的所有极大多分知识状态记为 $\mathcal{W}_{\mathcal{K}} = \{K \mid K \in \mathcal{W}_{p^v}, p \in Q, v \in L_p\}$ 。

根据定义 9 和 10, 有以下引理 1。

引理 1 设 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 是多分闭包空间, $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{K}$ 的极小交式生成组, 则 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}_{\mathcal{K}}$ 。

证明 假设 $K \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{W}_{\mathcal{K}}$, 则 $K = \bigcap_{p \in Q} W_{p^{K(p)}}$, 其中对任意的 $p \in Q$, 有 $W_{p^{K(p)}} \in \mathcal{W}_{p^{K(p)}}$ 并且 $K \sqsubset W_{p^{K(p)}}$ 。又因为 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{K}$ 的极小交式生成组, 则对任意的 $W_{p^{K(p)}} \in \mathcal{W}_{p^{K(p)}}$, 都存在 $\mathcal{A}_p \subseteq \mathcal{A}$ 使得 $W_{p^{K(p)}} = \bigcap \mathcal{A}_p$, 这意味着, $K = \bigcap_{p \in Q} (\bigcap \mathcal{A}_p)$, 这与 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{K}$ 的极小交式生成组矛盾。因此, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}_{\mathcal{K}}$ 。证毕。

定义 11 设 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 是一个多分闭包空间, 一个多分知识状态 $K \in \mathcal{W}_{\mathcal{K}}$ 称为在 p^v 处的交式生成子, 如果不存在 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}_{\mathcal{K}} \setminus \{K\}$, 使得 $K = \bigcap \mathcal{A}$ 。

记法 5 设 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 是一个多分闭包空间, 对任意的 $p \in Q, v \in L_p, p^v$ 处所有的交式生成子构成的集合记为 σ_{p^v} , 进而问题 p 的所有交式生成子构成的集合记为 $\sigma_p = \bigcup_{v \in L_p} \sigma_{p^v}$ 。

我们有以下结论:

定理 2 设 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 是一个多分闭包空间, $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{K}$ 的极小交式生成组, 则 $\mathcal{A} = \bigcup_{p \in Q} \sigma_p$ 。

证明 假设存在 $K \in \mathcal{A}$, 但 $K \notin \bigcup_{p \in Q} \sigma_p$, 则对任意的 $p \in Q$, 有 $K \notin \sigma_p$, 于是对任意的 $v \in L_p$, 有 $K \notin \sigma_{p^v}$ 。令 $K(p) = v_p$, 则可选择 $K_{p^{v_p}} \in \mathcal{K}$, 使得 $p^{v_p} \in K \sqsubset K_{p^{v_p}}$ 。因此, $K = \bigcap_{p \in Q} K_{p^{v_p}}$ 。又对任意的 $K_{p^{v_p}}$, 都存在 $\mathcal{A}_{K_{p^{v_p}}} \subseteq \mathcal{A}$ 使得 $K_{p^{v_p}} = \bigcap \mathcal{A}_{K_{p^{v_p}}}$ 。则 $K =$

$\cap_{p \in Q} (\cap_{K \in \sigma_p} \mathcal{A})$, 这意味着存在 $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A} \setminus \{K\}$ 使得 $K = \cap \mathcal{A}'$, 这与 $K \in \mathcal{A}$ 矛盾, 因此 $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{p \in Q} \sigma_p$. 反之, 任取 $K \in \bigcup_{p \in Q} \sigma_p$, 则存在 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, 使得 $K = \cap \mathcal{F}$. 因此, 由引理 1 和定义 11 知, $K \in \mathcal{F}$, 则 $K \in \mathcal{A}$. 综上, $\mathcal{A} = \bigcup_{p \in Q} \sigma_p$ 证毕。

定理 2 表明, 对于任意的多分闭包空间 $(Q, L_p, \mathcal{K})$, $\mathcal{K}$ 的极小交式生成组由 $\mathcal{K}$ 的所有交式生成子组成。

例 3 取与例 1 中相同问题域以及每个问题对应的偏序集合。考虑多分知识结构 $\mathcal{K} = \{000, 100, 010, 001, 110, 200, 002, 102, 210, 201, 003, 103, 013, 104, 113, 212, 213, 312, 314\}$, 容易验证 $\mathcal{K}$ 是多分闭包空间。在 a^0 处的所有极大多分知识状态为 $\mathcal{K}_{a^0}^0 = \{002, 013\}$, 在 b^0 处的所有极大多分知识状态为 $\mathcal{K}_{b^0}^0 = \{201, 104\}$, 在 c^0 处的所有极大多分知识状态为 $\mathcal{K}_{c^0}^0 = \{110, 210\}$, 在 a^1 处的所有极大多分知识状态为 $\mathcal{K}_{a^1}^1 = \{104, 113\}$, 在 b^1 处的所有极大多分知识状态为 $\mathcal{K}_{b^1}^1 = \{314\}$, 在 c^1 处的所有极大多分知识状态为 $\mathcal{K}_{c^1}^1 = \{201\}$, 在 a^2 处的所有极大多分知识状态为 $\mathcal{K}_{a^2}^2 = \{212, 213\}$, 在 c^2 处的所有极大多分知识状态为 $\mathcal{K}_{c^2}^2 = \{312\}$, 在 a^3 处的所有极大多分知识状态为 $\mathcal{K}_{a^3}^3 = \{314\}$, 在 c^3 处的所有极大多分知识状态为 $\mathcal{K}_{c^3}^3 = \{113, 213\}$, 在 c^4 处的所有极大多分知识状态为 $\mathcal{K}_{c^4}^4 = \{314\}$ 。进而, 因为 $002 = 212 \cap 104$, $013 = 113 \cap 213$, 所以在 a^0 处的所有交式生成子为 $\sigma_{a^0} = \emptyset$ 。在 b^0 处的所有交式生成子为 $\sigma_{b^0} = \{201, 104\}$ 。又因为 $110 = 312 \cap 113$, $210 = 212 \cap 213$, 所以在 c^0 处的所有交式生成子为 $\sigma_{c^0} = \emptyset$ 。在 a^1 处的所有交式生成子为 $\sigma_{a^1} = \{104, 113\}$, 在 b^1 处的所有交式生成子为 $\sigma_{b^1} = \{314\}$, 在 c^1 处的所有交式生成子为 $\sigma_{c^1} = \{201\}$, 在 a^2 处的所有交式生成子为 $\sigma_{a^2} = \{212, 213\}$, 在 c^2 处的所有交式生成子为 $\sigma_{c^2} = \{312\}$, 在 a^3 处的所有交式生成子为 $\sigma_{a^3} = \{314\}$, 在 c^3 处的所有交式生成子为 $\sigma_{c^3} = \{113, 213\}$, 在 c^4 处的所有交式生成子为 $\sigma_{c^4} = \{314\}$ 。因此, 去掉重复元可得, $\bigcup_{p \in Q} \sigma_p = \{201, 113, 312, 104, 212, 213, 314\}$, 根据定理 2, 该集族为多分闭包空间 $\mathcal{K}$ 的极小交式生成组。由极小交式生成组构建整个多分闭包空间 $\mathcal{K}$ 的过程如表 2 所示, 右列中所有状态构成的集族就是 $\mathcal{K}$ 。

表 2 由极小交式生成组构建多分闭包空间
Tab.2 Constructing polytomous closure space from the minimal intersection generation group

交式生成子	314
213	213
212	212, 210
113	113, 013, 010
104	104, 003, 002, 000, 103
312	312, 110, 102, 100
201	201, 200, 001

4 问题不同响应值的知识评价

任给一个多分知识结构, 本节研究基于问题不同响应值的多分知识结构对个体进行知识评价。这种评价过程不同于利用扩展多分知识结构和多分问题的评价^[27], 而是直接对二分问题进行测试的知识评价。我们以例 3 中的多分闭包空间为例, 阐述这种评价过程, 至于多分知识空间和多分知识结构, 可以做类似的评价。为了阐明这一评价过程, 我们先介绍以下记法。

记法 6 设 $(Q, L_p, \mathcal{K})$ 为一个多分知识结构, 对任意的 $p \in Q, v \in L_p$, 记 $\mathcal{K}_{p^v} = \{K: p^v \in K\}$ 。

考虑例 3 中的多分知识结构 $\mathcal{K} = \{a^0 b^0 c^0, a^1 b^0 c^0, a^0 b^1 c^0, a^0 b^0 c^1, a^1 b^1 c^0, a^2 b^0 c^0, a^0 b^0 c^2, a^1 b^0 c^2, a^2 b^1 c^0, a^2 b^0 c^1, a^0 b^0 c^3, a^1 b^0 c^3, a^0 b^1 c^3, a^1 b^0 c^4, a^1 b^1 c^3, a^2 b^1 c^2, a^2 b^1 c^3, a^3 b^1 c^2, a^3 b^1 c^4\}$ 。显然, 根据记法 6 有 $\mathcal{K}_{a^1} = \{a^1 b^0 c^0, a^1 b^1 c^0, a^1 b^0 c^2, a^1 b^0 c^3, a^1 b^0 c^4, a^1 b^1 c^3\}$ 。假设某个体的多分知识状态 $K \in \mathcal{K}$, 因为测试开始前没有 K 的相关信息, 此时记 $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$ 。测试开始时, 向个体测试第一个问题 q , 如果个体能解决问题 q 到水平 v , 则从 $\mathcal{K}_0$ 中删除所有不包含 q^v 的多分知识状态, 如果个体不能解决问题 q 到水平 v , 则从 $\mathcal{K}_0$ 中删除所有包含 q^v 的多分知识状态。然后, 再测试下个问题, 重复此过程, 直到第 n 步的 $\mathcal{K}_n$ 中只包含一个多分知识状态, 则这个多分知识状态就是个体的多分知识状态。

假设某个体的多分知识状态为 $K = \{a^3, b^1, c^2\}$, 则按照 3 个问题的排列有 6 种不同测试顺序的情况, 现讨论其中的 3 种, 其余类似。

如果该个体第一次测试问题 a , 则个体能回答 a 到第 3 层, 因此, 在 $\mathcal{K}_0$ 中删除不包含 a^3 的多

分知识状态, 得到 $\mathcal{K}_1 = \{a^3b^1c^2, a^3b^1c^4\}$ 。因为 $\mathcal{K}_1$ 中两个状态都包含 b^1 , 此时若测试问题 b , 则不能区分这两个状态, 因此, 第二次测试可以选择问题 c , 则个体能回答 c 到第 2 层, 在 $\mathcal{K}_1$ 中删除不包含 c^2 的多分知识状态, 得到 $\mathcal{K}_2 = \{a^3b^1c^2\}$ 。因为 $\mathcal{K}_2$ 中只包含多分知识状态 $\{a^3, b^1, c^2\}$, 则这个多分知识状态就为该个体的多分知识状态。由此可知, 对于多分知识状态为 $K = \{a^3, b^1, c^2\}$ 的个体, 按照 $a \rightarrow c$ 的顺序进行两次测试, 就能得到该个体的多分知识状态, 而不需要测试所有问题。

如果该个体第一次测试问题 b , 则个体能回答 b 到第 1 层, 因此, 在 $\mathcal{K}_0$ 中删除不包含 b^1 的多分知识状态, 此时得到 $\mathcal{K}_1 = \{a^0b^1c^0, a^1b^1c^0, a^2b^1c^0, a^0b^1c^3, a^1b^1c^3, a^2b^1c^3, a^3b^1c^2, a^3b^1c^4\}$ 。如果该个体第二次测试问题 c , 则个体能回答 c 到第 2 层, 因此, 在 $\mathcal{K}_1$ 中删除不包含 c^2 的多分知识状态, 得到 $\mathcal{K}_2 = \{a^2b^1c^2, a^3b^1c^2\}$ 。个体第三次测试问题 a , 则个体能回答 a 到第 3 层, 因此, 在 $\mathcal{K}_2$ 中删除不包含 a^3 的多分知识状态, 得到 $\mathcal{K}_3 = \{a^3b^1c^2\}$ 。因为 $\mathcal{K}_3$ 中只包含多分知识状态 $\{a^3, b^1, c^2\}$, 则这个多分知识状态就为该个体的多分知识状态。由此可知, 对于多分知识状态为 $K = \{a^3, b^1, c^2\}$ 的个体, 按照 $b \rightarrow a \rightarrow c$ 的顺序进行 3 次测试, 才能得到该个体的多分知识状态。

如果该个体第一次测试问题 c , 则个体能回答 c 到第 2 层, 因此, 在 $\mathcal{K}_0$ 中删除不包含 c^2 的多分知识状态, 此时得到 $\mathcal{K}_1 = \{a^0b^0c^2, a^1b^0c^2, a^2b^1c^2, a^3b^1c^2\}$ 。如果该个体第二次测试问题 a , 则个体能回答 a 到第 3 层, 因此, 在 $\mathcal{K}_1$ 中删除不包含 a^3 的多分知识状态, 得到 $\mathcal{K}_2 = \{a^3b^1c^2\}$ 。由此可知, 对于多分知识状态为 $K = \{a^3, b^1, c^2\}$ 的个体, 按照 $c \rightarrow a$ 的顺序进行两次测试, 就能得到该个体的多分知识状态, 而不需要测试所有问题。在评估出个体的多分知识状态后, 可基于多分知识结构对个体进行学习指导。对于多分知识状态为 $K = \{a^3, b^1, c^2\}$ 的个体, 在多分知识结构 $\mathcal{K}$ 中, 有 $a^2b^1c^2 \rightarrow a^3b^1c^2 \rightarrow a^3b^1c^4, a^1b^0c^2 \rightarrow a^3b^1c^2 \rightarrow a^3b^1c^4, a^1b^1c^0 \rightarrow a^3b^1c^2 \rightarrow a^3b^1c^4$, 如图 1 所示。

由图 1 可知, 该个体刚学会问题 a 到第 2 层, 或者刚学会问题 a 到第 1 层但对问题 b 完全不会, 或者刚学会问题 a 到第 1 层但对问题 c 完全不会。因此, 该个体需要对问题 a 的第 1 层和第 2 层进行训练复习, 强化巩固。同时, 该个体下一步可学习

问题 c 到第 4 层, 教师在教学时需对问题 c 的第 4 层进行指导。

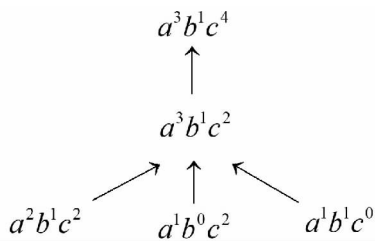


图 1 多分知识状态 $a^3b^1c^2$ 的路径图

Fig. 1 Paths of the polytomous knowledge state $a^3b^1c^2$

5 结语

问题不同响应值表示个体在对问题回答时, 不同问题的评价方式可能不一样。这种情形下的多分知识状态代表了个体解决每个问题的具体水平。对于响应值不同的情形, 多分知识状态之间的包含关系及交并运算都按每个问题对应的响应值的偏序关系定义。

根据多分知识空间逐点并封闭的特征, 定义 5 和定义 7 分别给出了多分知识空间的基和原子的定义。进一步, 定理 1 证明了多分知识空间基由它的所有原子组成。根据多分闭包空间逐点交封闭的特征, 定义 9 和 11 分别给出了多分闭包空间的极小交式生成组和交式生成子的定义。命题 1 表明每一个多分知识空间的基是唯一的。进而, 定理 1 阐明了多分知识空间基的构成, 即多分知识空间的基由其所有原子组成。命题 2 表明每一个多分闭包空间的极小交式生成组是唯一的。进而, 定理 2 阐明了极小交式生成组的构成, 即多分闭包空间的极小交式生成组由其所有的交式生成子组成。为了对有关定义和定理深刻理解, 例 1 用 3 个问题及每个问题对应的不同的响应值集合阐明了截面集的概念。根据定理 1, 例 2 详细讨论了寻找基于问题不同响应值的多分知识空间基的方法, 同时阐明了由基张成多分知识空间的方法。根据定理 2, 例 3 详细讨论了寻找问题不同响应值的多分闭包空间的极小交式生成组的方法, 并阐明了由极小交式生成组构造多分闭包空间的方法。

多分知识结构通过子集来刻画可非常便捷的贮存, 更重要的是, 多分知识空间的原子以及多分闭包空间的交式生成子在教育心理学中有重要的作用。按照奥苏贝尔的有意义学习理论, 原子与

交互式生成子可以通过交并运算生成多分知识结构,这可以看成是后续学习的基础和知识固着点。原子与交互式生成子分别在多分知识空间和多分闭包空间起着核心作用。同时,Tall 提出的认知根源理论认为,认知根源是一个有意义的核心知识的认知单元,并在后继的学习中具有长远意义^[28]。因此,原子与交互式生成子类似于韬尔提出的认知根源。

在第4节讨论了基于问题不同响应值的多分知识结构对个体进行知识评价,并以例3中的多分闭包空间为例,阐述了这种评价过程。从评价过程可以看出,虽然每个问题的响应值不同,但可以通过有限次的测试诊断出个体的多分知识状态。然后,基于已给定的多分知识结构中的学习路径,可对个体下一步的学习作指导,并对个体刚学会的问题进行练习,强化个体的理解。

根据认知心理学的观点,个体能解决某些问题,是因为个体掌握了解决这些问题所需的技能,或者说个体拥有了解决这些问题的能力。一个显然的问题是,如何从技能或模糊技能^[29]和技能函数的角度构造多分知识空间、多分闭包空间以及多分知识结构。按照 Piaget 的认知发展理论^[30]和 Anderson 的 ACT-R 理论^[31],不同个体对技能熟练程度可能不一样,因此,如何根据不同技能熟练程度来构造响应值不同的多分知识结构是值得考虑的问题。另外,本文的知识评价是根据多分知识结构诊断出个体的多分知识状态,但更有意义的是如何根据外在表现的多分知识状态诊断出个体的内在的能力和状态,这个问题需在以后工作中考虑。

参考文献

- [1] AUSUBEL D P. Educational psychology: A cognitive-view[M]. New York, NY: Holt, Rinehart, & Winston, 1968.
- [2] 顾庆沅,鲍建生,周超. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海:上海教育出版社,2009.
- [3] 俞晓琳. 项目反应理论与经典测验理论之比较[J]. 南京师范大学学报(社会科学版),1998,4(4):74-77.
- [4] YU X L. A comparison between item response theory and classical test theory[J]. Journal of Nanjing Normal University(Social Science Edition), 1998, 4(4): 74-77.
- [5] DOIGNON J P, FALMAGNE J C. Spaces for the assessment of knowledge[J]. International Journal of Man-Machine Studies, 1985, 23(2): 175-196.
- [6] FALMAGNE J C, DOIGNON J P. Learning spaces: Interdisciplinary applied mathematics[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011.
- [7] FALMAGNE J C, ALBERT D, DOBLE C, et al. Knowledge spaces: Applications in education[M]. New York, NY: Springer Verlag, 2013.
- [8] 林宇静,李进金,陈惠琴. 基于形式背景构建多分知识结构与个性化指导学习的方法[J]. 南京大学学报(自然科学),2024,60(3):477-490.
- [9] LIN Y J, LI J J, CHEN H Q. The method of constructing polytomous knowledge structure and personalized instruction learning based on formal context[J]. Journal of Nanjing University(Natural Science), 2024, 60(3): 477-490.
- [10] 李进金,孙文. 知识空间,形式背景和知识基[J]. 西北大学学报(自然科学),2019,49(4):517-526.
- [11] LI J J, SUN W. Knowledge space, formal context and knowledge base[J]. Journal of Northwest University(Natural Science Edition), 2019, 49(4): 517-526.
- [12] 陈惠琴,李进金,林宇静,等. 技能背景下学习空间的判别方法和技能评估[J]. 南京大学学报(自然科学),2023,59(1):107-119.
- [13] CHEN H Q, LI J J, LIN Y J, et al. Discrimination method of learning space and skills assessment in skill context[J]. Journal of Nanjing University(Natural Science), 2023, 59(1): 107-119.
- [14] 周银凤,李进金,冯丹露,等. 形式背景下的学习路径与技能评估[J]. 模式识别与人工智能,2021,34(12):1069-1084.
- [15] ZHOU Y F, LI J J, FENG D L, et al. Learning paths and skills assessment in formal context[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2021, 34(12): 1069-1084.
- [16] 智慧来,李金海. 面向知识结构分析的模糊概念格模型[J]. 软件学报,2024,35(5):2466-2484.
- [17] ZHI H L, LI J H. Fuzzy concept lattice models for knowledge structure analysis[J]. Journal of Software, 2024, 35(5): 2466-2484.
- [18] GE X. On galois connections between polytomous knowledge structures and polytomous attributions[J]. Journal of Mathematical Psychology, 2022, 110: 102708.
- [19] XU B C, LI J J. The inclusion degrees of fuzzy skill maps and knowledge structures[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2023, 465: 108540.
- [20] WANG B, LI J J, SUN W. CD-polytomous knowledge

- spaces and corresponding polytomous surmise systems [J]. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 2023, 76: 87-105.
- [15] BOTTESI G, SPOTO A, FREESTON M H, et al. Beyond the score: Clinical evaluation through formal psychological assessment [J]. *Journal of Personality Assessment*, 2015, 97(3): 252-260.
- [16] SPOTO A, BOTTESI G, SANAVIO E, et al. Theoretical foundations and clinical implications of formal psychological assessment [J]. *Psychotherapy and Psychosomatics*, 2013, 82(3): 197-199.
- [17] SCHREPP M. A generalization of knowledge space theory to problems with more than two answer alternatives [J]. *Journal of Mathematical Psychology*, 1997, 41(3): 237-243.
- [18] BARTL E, BELOHLAVEK R. Knowledge spaces with graded knowledge states [J]. *Information Sciences*, 2011, 181(8): 1426-1439.
- [19] STEFANUTTI L, ANSELM P, CHIUSOLE D, et al. On the polytomous generalization of knowledge space theory [J]. *Journal of Mathematical Psychology*, 2020, 94: 102306.
- [20] HELLER J. Generalizing quasi-ordinal knowledge spaces to polytomous items [J]. *Journal of Mathematical Psychology*, 2021, 101: 102515.
- [21] SUN W, LI J J, LIN F C, et al. Constructing polytomous knowledge structures from fuzzy skills [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2023, 461: 108395.
- [22] SUN W, LI J J, HE Z R, et al. Well-graded polytomous knowledge structures [J]. *Journal of Mathematical Psychology*, 2023, 114: 102770.
- [23] XU B C, LI J J, SHI F G. Polytomous knowledge structures constructed by L-fuzzy approximation operators [J]. *Information Sciences*, 2025, 712: 122137.
- [24] WANG G X, LI J J, XU B C. Constructing polytomous knowledge structures from L-fuzzy S-approximation operators [J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2025, 179: 109363.
- [25] ZHOU Y F, YANG H L, LI J J, et al. Skill assessment method: A perspective from concept cognitive learning [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2025, 508: 109331.
- [26] STANLEY R P. *Enumerative combinatorics* [M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [27] 何丽琴, 孙文, 李进金. 多分知识结构的知识评价 [J]. *闽南师范大学学报(自然科学版)*, 2024, 37(2): 118-132.
- HE L Q, SUN W, LI J J. Knowledge assessment based on polytomous knowledge structures [J]. *Journal of Minnan Normal University (Natural Science)*, 2024, 37(2): 118-132.
- [28] TALL D. *Advanced mathematical thinking* [M]. Dordrecht, Netherlands: Springer Science & Business Media, 2006.
- [29] SUN W, LI J J, GE X, et al. Knowledge structures delineated by fuzzy skill maps [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2021, 407: 50-66.
- [30] PIAGET J. *The development of thought: Equilibrium of cognitive structures* [M]. New York: Viking, 1977.
- [31] ANDERSON J R, BOTHELL D, BYRNE M D, et al. *An integrated theory of the mind* [J]. *Psychological Review*, 2004, 111(4): 1036-1060.

(编辑 张欢)