



· 粗糙集与形式概念分析中的约简研究 ·

基于三元粒概念的三元概念获取

李 谦¹, 万 青^{1,2}, 魏 玲^{2,3}

1. 西安工程大学 理学院, 陕西 西安 710048; 2. 西北大学 概念、认知与智能研究中心, 陕西 西安 710127;
3. 西北大学 数学学院, 陕西 西安 710127

摘要 三元概念分析作为形式概念分析的一种扩展理论和方法, 主要用于处理三维数据, 三元概念获取是其重要的研究问题之一。本文借鉴形式概念分析中基于对象概念获取所有二元概念的研究思路给出获取所有三元概念的方法。首先, 在已有的对象-条件三元粒概念生成三元概念方法的基础上, 给出从对象-条件三元粒概念的内涵集出发获取所有三元概念的方法; 其次, 根据三元背景的特点以及三元概念外延、内涵和方式之间的关系, 提出了基于属性-对象(条件-属性)三元粒概念方式集(外延集)的获取所有三元概念的方法; 最后, 对本文所提出的方法以属性-对象三元粒概念为例给出具体的计算步骤。

关键词 对象概念; 三元粒概念; 外延集; 内涵集; 方式集

中图分类号: O29; TP18 **DOI:** 10.16152/j.cnki.xdxbr.2026-01-015

Triadic concepts acquisition based on triadic granular concepts

LI Qian¹, WAN Qing^{1,2}, WEI Ling^{2,3}

1. School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China;
2. Institute of Concepts, Cognition and Intelligence, Northwest University, Xi'an 710127, China;
3. School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China

Abstract As the extended theory and method of formal concept analysis, triadic concept analysis is mainly used to process three-dimensional data, and the triadic concepts acquisition is one of its important research topics. Motivated by the idea of acquiring binary concepts based on the object concepts in formal concept analysis, this paper gives the method of obtaining all triadic concepts. First of all, on the basis of the existing method of generating triadic concepts from object-condition triadic granular concepts, a method of obtaining all triadic concepts from the intent set of object-condition triadic granular concepts is presented. Secondly, according to the characteristics of a triadic context and the relationship between the extent, the intent and the mode of a triadic concept, the method of obtaining all triadic concepts based on the mode set (the extent set) of attribute-object (condition-attribute) triadic granular concepts is proposed. Finally, the concrete calculation steps of the method proposed in this paper are given by taking the attribute-object triadic granular concepts as an example.

Keywords object concept; triadic granular concept; the extent set; the intent set; the mode set

收稿日期: 2025-06-10 修回日期: 2025-07-15

基金项目: 国家自然科学基金(12101478, 12171392); 陕西数理基础科学研究项目(23JSZ008)。

第一作者: 李谦, 女, 硕士研究生, 从事形式概念分析研究, liqian19992022@163.com。

通信作者: 万青, 女, 副教授, 硕士生导师, 从事粗糙集、形式概念分析、粒计算等研究, wqysbe@163.com。

随着社会日新月异的发展,数据的复杂度也逐步提升,Wille 等人受 Peirce 三个论域范畴中实用主义哲学的启发提出了三元概念分析^[1]数据处理方法,可为某些复杂数据的知识获取提供一些有效的途径。

三元概念分析是形式概念分析^[2-3]的推广,其基础数据是一个三维交叉表,是由对象集、属性集、条件集以及这三者之间的三元关系构成的四元组,称其为三元背景。在三元背景中有两类诱导算子,称由这些算子产生的不动点所对应的三元对 (A_1, A_2, A_3) 为三元概念, A_1, A_2 和 A_3 分别为该三元概念的外延、内涵和方式。

在三元概念分析提出的初期,有关该理论的研究主要集中在概念三元格的构造^[4-7]、三元蕴含及关联规则挖掘^[8-9]、三元背景的因子分析和模糊化^[10-11]等方面。三元概念分析与形式概念分析之间具有很强的关联性,因此三元概念分析中这些问题的解决思路都与形式概念分析中相关问题的研究思路密切相关^[12]。比如,三元背景可以拆分成不同的形式背景,三元背景中的两类诱导算子可以看作是某一种形式背景下的诱导算子。

基于这两个理论之间的关系,许多学者又将形式概念分析中的约简^[13-14]、多粒度分析^[15-16]、近似概念^[17]以及基于布尔矩阵的形式概念获取方法^[18-19]等研究问题引入到三元概念分析中,进一步丰富了三元概念分析的理论和方法。如魏玲等提出了三元背景基于二元关系不变的约简^[20];Wan 等通过引入多粒度分析提出了多粒度三元概念分析并研究了最优粒度组合的选择问题^[21];Ananias 等通过对用户需求进行近似处理提出了一种从三元背景中获取知识的新方法^[22];王霞等将粗糙集近似算子引入到三元概念分析中提出了基于粗糙集的三元概念分析^[23],还将布尔矩阵引入到三元概念分析中,研究三元背景和三元概念的布尔矩阵表示方法^[24]。

此外,鉴于形式概念分析中对象概念在形式概念获取过程中的特殊作用,王霞等提出了对象-条件三元概念,并由此给出了一种三元概念的获取方法^[25]。随后,李俊余等在研究三元概念约简时还提出了另外 5 种特殊三元概念,分别是条件-对象三元概念、属性-对象三元概念、对象-属性三元概念、条件-属性三元概念和属性-条件三元概念^[26]。本文在这些特殊三元概念的基础上,探讨如何从三元概念的外延集、内涵集和方

式集出发获取所有的三元概念,从粒计算的角度分析,将这 6 种特殊三元概念称为三元粒概念。一方面在文献[25]的基础上,借鉴基于对象内涵集获取所有形式概念的方法,给出基于对象-条件三元粒概念内涵集的获取所有三元概念的方法,并说明条件-对象三元粒概念与对象-条件三元粒概念在此方法中所起到的作用是一样的;另一方面,根据三元概念外延、内涵和方式之间的关系,给出基于属性-对象(对象-属性)三元粒概念方式集的获取所有三元概念的方法,以及基于条件-属性(属性-条件)三元粒概念外延集的获取所有三元概念的方法。

1 预备知识

本节给出形式概念分析与三元概念分析的基础知识。

1.1 形式概念分析基础知识

定义 1^[2-3] 称 (G, M, I) 为形式背景,其中 $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ 为对象集,每一个 $g_i (i \leq n)$ 称为一个对象, $M = \{m_1, \dots, m_w\}$ 为属性集,每一个 $m_j (j \leq w)$ 称为一个属性, I 为 G 和 M 之间的二元关系,即 $I \subseteq G \times M$ 。若 $(g, m) \in I$,则表示对象 g 具有属性 m ,记为 gIm 。

在形式背景 $F = (G, M, I)$ 中,对于对象子集 $A \subseteq G$ 和属性子集 $B \subseteq M$,Wille 等提出了一对诱导算子^[2-3],具体定义为

$$A^* = \{m \in M \mid \forall g \in A, (g, m) \in I\},$$

$$B^* = \{g \in G \mid \forall m \in B, (g, m) \in I\}.$$

式中: A^* 表示 A 中所有对象共同具有的最大的属性集合; B^* 表示共同具有 B 中所有属性的最大的对象集合。进一步,若二元对 (A, B) 满足 $A^* = B$ 且 $B^* = A$,则称 (A, B) 为形式概念,简称概念。其中, A 称为概念的外延, B 称为概念的内涵。

记形式背景 F 中所有概念的集合为 $L(F)$,在任意两个概念 $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ 之间定义偏序关系以及上、下确界运算如下:

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 (\Leftrightarrow B_2 \subseteq B_1),$$

$$(A_1, B_1) \vee (A_2, B_2) =$$

$$((A_1 \cup A_2)^*, B_1 \cap B_2),$$

$$(A_1, B_1) \wedge (A_2, B_2) =$$

$$(A_1 \cap A_2, (B_1 \cup B_2)^*).$$

$\forall g \in G, \forall m \in M$,记 $\{g\}^*$ 为 g^* ,称其为对象内涵,记 $\{m\}^*$ 为 m^* ,称其为属性外延,并称

概念 (g^{**}, g^*) 为对象概念, (m^*, m^{**}) 为属性概念。这两类特殊概念的一个重要性质如引理 1 所述。

引理 1^[2-3] 设 $F = (G, M, I)$ 为形式背景, $L(F)$ 为其概念的集合。 $\forall (A, B) \in L(F)$, 有

$$(A, B) = \bigvee_{g \in A} (g^{**}, g^*) = \bigwedge_{m \in B} (m^*, m^{**})。$$

由引理 1 知, 任意一个概念可由某些对象概念通过 $\vee$ 运算得到, 也可由某些属性概念通过 $\wedge$ 运算得到。因此, 从粒计算的角度分析, 将这两类概念看作是一种粒, 由这些粒出发可以得到所有概念。以对象概念为例, 此方法的步骤可描述为:

步骤 1 利用 $*$ 算子求出所有对象概念的集合 $\mathcal{O} = \{(g^{**}, g^*) \mid g \in G\}$;

步骤 2 通过对象内涵的交运算得到所有概念的内涵

$$L_{\mathcal{O}}(F) = \{\cap g_i^* \mid (g_i^{**}, g_i^*) \in \mathcal{O}, \\ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}\} \cup M;$$

步骤 3 利用 $*$ 算子得到所有概念

$$L(F) = \{((\cap g_i^*)^*, \cap g_i^*) \mid \cap g_i^* \in \\ L_{\mathcal{O}}(F)\} \cup \{(M^*, M)\}。$$

为了方便与三元概念分析中的相关名称进行对应, 后续本文称形式背景为二元背景, 形式概念为二元概念。

1.2 三元概念分析基础知识

本小节仅简单罗列一些与本文相关的三元概念分析中的定义和性质, 更多详细内容可参考文献[1, 4-11]。

定义 2^[1] 称 (K_1, K_2, K_3, Y) 为三元背景, 其中 K_1 为对象集, K_2 为属性集, K_3 为条件集, Y 为 K_1, K_2 和 K_3 之间的三元关系, 即 $Y \subseteq K_1 \times K_2 \times K_3$ 。称 K_1, K_2 和 K_3 中的元素分别为对象、属性和条件。若 $(a_1, a_2, a_3) \in Y$, 则表示对象 a_1 在条件 a_3 下具有属性 a_2 。

三元背景上的两类诱导算子由定义 3 与定义 4 给出。

定义 3^[1] 设 $\mathcal{R} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ 为三元背景, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ 且 $j < k$, $X \subseteq K_i$, $Z \subseteq K_j \times K_k$ 。(i) - 诱导算子定义为

$$X^{(i)} = \{(a_j, a_k) \in K_j \times K_k \mid \forall a_i \in X, \\ (a_i, a_j, a_k) \in Y\}, \\ Z^{(i)} = \{a_i \in K_i \mid \forall (a_j, a_k) \in Z, \\ (a_i, a_j, a_k) \in Y\}。$$

(i) - 诱导算子相当于二元背景 $\mathcal{R}^{(i)} =$

$(K_i, K_j \times K_k, Y^{(i)})$ 上的 $*$ 算子。其中, $\forall a_i \in K_i$, $a_j \in K_j, a_k \in K_k$, 有

$$a_i Y^{(i)}(a_j, a_k) \Leftrightarrow a_j Y^{(j)}(a_i, a_k) \\ \Leftrightarrow a_k Y^{(k)}(a_i, a_j) \Leftrightarrow (a_i, a_j, a_k) \in Y。$$

另外, 从三元背景的结构出发定义的 (i, j, X_k) - 诱导算子如下。

定义 4^[1] 设 $\mathcal{R} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ 为三元背景, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, $X_i \subseteq K_i$, $X_j \subseteq K_j$, $X_k \subseteq K_k$ 。(i, j, X_k) - 诱导算子定义为

$$X_i^{(i, j, X_k)} = \{a_j \in K_j \mid \forall (a_i, a_k) \in X_i \times X_k, \\ (a_i, a_j, a_k) \in Y\}, \\ X_j^{(i, j, X_k)} = \{a_i \in K_i \mid \forall (a_j, a_k) \in X_j \times X_k, \\ (a_i, a_j, a_k) \in Y\}。$$

(i, j, X_k) - 诱导算子实为二元背景 $\mathcal{R}_{X_k}^{ij} = (K_i, K_j, Y_{X_k}^{ij})$ 上的 $*$ 算子。其中,

$$(a_i, a_j) \in Y_{X_k}^{ij} \Leftrightarrow \forall a_k \in X_k, (a_i, a_j, a_k) \in Y。$$

基于(i) - 诱导算子, 三元概念的定义如下。

定义 5^[1] 设 $\mathcal{R} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ 为三元背景, $A_i \subseteq K_i$, $i = 1, 2, 3$ 。若满足 $A_i = (A_j \times A_k)^{(i)}$, 其中 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ 且 $j < k$, 则称 (A_1, A_2, A_3) 为三元背景 $\mathcal{R}$ 的三元概念, A_1, A_2 和 A_3 分别为三元概念的外延、内涵和方式。记 $\mathcal{L}(\mathcal{R})$ 为三元背景 $\mathcal{R}$ 上所有三元概念的集合。

此外, 记三元背景 $\mathcal{R}$ 上所有三元概念外延的集合、内涵的集合和方式的集合分别为

$$\mathcal{E}(\mathcal{R}) = \{A_1 \mid (A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{L}(\mathcal{R})\}, \\ \mathcal{I}(\mathcal{R}) = \{A_2 \mid (A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{L}(\mathcal{R})\}, \\ \mathcal{M}(\mathcal{R}) = \{A_3 \mid (A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{L}(\mathcal{R})\},$$

并依次称 $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ 、 $\mathcal{I}(\mathcal{R})$ 和 $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ 为三元概念的外延集、内涵集和方式集。

通过结合两类诱导算子, 定理 1 给出了三元概念的一种具体计算方法。

定理 1^[1] 设 $\mathcal{R} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ 为三元背景, $X_i \subseteq K_i$, $X_k \subseteq K_k$ 且 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, 记

$$A_j = X_i^{(i, j, X_k)}, A_i = X_i^{(i, j, X_k)}(i, j, X_k), \\ A_k = (X_i^{(i, j, X_k)}(i, j, X_k) \times X_i^{(i, j, X_k)})^{(k)}。$$

则 (A_1, A_2, A_3) 为三元概念。

定理 1 提供的方法实际上是先由 X_k 确定二元背景 $\mathcal{R}_{X_k}^{ij} = (K_i, K_j, Y_{X_k}^{ij})$, 再在该二元背景上利用 $*$ 算子由 X_i 得到二元概念 (A_i, A_j) , 继而又在二元背景 $\mathcal{R}^{(k)} = (K_k, K_i \times K_j, Y^{(k)})$ 上利用 $*$ 算子由 $A_i \times A_j$ 得到 A_k 。下面通过例 1 给出使用定理 1 计算三元概念的详细过程。

例 1 表 1 是一个三元背景 $\mathcal{R} = (K_1, K_2, \{o, p, q, r\}, \text{条件集 } K_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\})$ 。
 $K_3, Y)$, 其中对象集 $K_1 = \{C, D, E\}$, 属性集 $K_2 =$

表 1 三元背景 $\mathcal{R} = (K_1, K_2, K_3, Y)$
Tab. 1 A triadic context $\mathcal{R} = (K_1, K_2, K_3, Y)$

1				2				3				4				5			
<i>o</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>
<i>C</i>	×			×	×	×	×		×			×		×	×		×		
<i>D</i>					×	×			×					×		×	×		×
<i>E</i>		×		×	×	×	×						×	×			×		

取对象子集 $X_1 = \{C, E\}$ 和属性子集 $X_2 = \{p, q\}$, 记由 X_1 和 X_2 生成的三元概念为 (A_1, A_2, A_3) , 则由定理 1 可知,

$A_3 = X_2^{(2,3,X_1)}, A_2 = X_2^{(2,3,X_1)(2,3,X_1)},$

$A_1 = (X_2^{(2,3,X_1)(2,3,X_1)} \times X_2^{(2,3,X_1)})^{(1)}.$

由 X_1 确定的二元背景 $\mathcal{R}_{X_1}^{23} = (K_2, K_3, Y_{X_1}^{23})$ 如表 2 所示。

表 2 二元背景 $\mathcal{R}_{X_1}^{23} = (K_2, K_3, Y_{X_1}^{23})$

Tab. 2 A binary context $\mathcal{R}_{X_1}^{23} = (K_2, K_3, Y_{X_1}^{23})$

	1	2	3	4	5
<i>o</i>		×			
<i>p</i>		×			×
<i>q</i>		×		×	
<i>r</i>		×			

在表 2 中, 由于

$X_2^* = \{p, q\}^* = \{2\}, 2^* = \{o, p, q, r\},$

故 $A_3 = X_2^{(2,3,X_1)} = \{2\},$

表 3 二元背景 $\mathcal{R}^{(1)} = (K_1, K_2 \times K_3, Y^{(1)})$

Tab. 3 A binary context $\mathcal{R}^{(1)} = (K_1, K_2 \times K_3, Y^{(1)})$

	(<i>o</i> ,1)	(<i>o</i> ,2)	(<i>o</i> ,3)	(<i>o</i> ,4)	(<i>o</i> ,5)	(<i>p</i> ,1)	(<i>p</i> ,2)	(<i>p</i> ,3)	(<i>p</i> ,4)	(<i>p</i> ,5)	(<i>q</i> ,1)	(<i>q</i> ,2)	(<i>q</i> ,3)	(<i>q</i> ,4)	(<i>q</i> ,5)	(<i>r</i> ,1)	(<i>r</i> ,2)	(<i>r</i> ,3)	(<i>r</i> ,4)	(<i>r</i> ,5)
<i>C</i>	×			×		×	×	×		×		×		×			×		×	
<i>D</i>					×		×	×		×		×		×						×
<i>E</i>	×					×		×	×	×	×	×		×			×			

2 两类诱导算子的性质

本小节从三元背景的两类诱导算子与二元背景的诱导算子之间的关联性出发, 给出相关性质, 作为后续三元概念获取的理论基础。

首先, 已有结论表明 $(i) -$ 诱导算子和 $(i, j, X_k) -$ 诱导算子之间的关系如下。

性质 1^[4-5] 设 $\mathcal{R} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ 为三元

$A_2 = X_2^{(2,3,X_1)(2,3,X_1)} = A_3^{(2,3,X_1)} = \{o, p, q, r\}.$

进一步, 在表 3 所示的二元背景 $\mathcal{R}^{(1)} = (K_1, K_2 \times K_3, Y^{(1)})$ 中可得

$(A_2 \times A_3)^* = (\{o, p, q, r\} \times \{2\})^* =$

$\{(o, 2), (p, 2), (q, 2), (r, 2)\}^* = \{C, E\},$

故 $A_1 = (X_2^{(2,3,X_1)(2,3,X_1)} \times X_2^{(2,3,X_1)})^{(1)} = (A_2 \times A_3)^{(1)} = \{C, E\}.$

因此, 由定理 1 可得 $(CE, opqr, 2)$ 是由 $X_1 = \{C, E\}$ 和 $X_2 = \{p, q\}$ 生成的一个三元概念。

对任意的对象子集和属性子集对, 采用上述方法可得表 1 所示三元背景的所有三元概念的集合为

$\mathcal{L}(\mathcal{R}) = \{(\emptyset, K_2, K_3), (C, p, 1235), (C, oqr, 24), (D, opr, 5), (E, q, 124), (E, p, 245), (E, pq, 24), (CD, p, 235), (CE, K_2, 2), (K_1, p, 25), (K_1, pq, 2), (K_1, q, 24), (K_1, \emptyset, K_3), (K_1, K_2, \emptyset)\}.$

背景, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}, X_j \subseteq K_j, X_k \subseteq K_k$ 。则有 $(X_j \times X_k)^{(i)} = X_j^{(i,j,X_k)} = X_k^{(i,k,X_j)}.$

在二元背景 $\mathcal{R}_{X_k}^{ij} = (K_i, K_j, Y_{X_k}^{ij})$ 中, 当 X_k 为单点集时所对应的二元背景被称为 d-cut, 具体定义如下。

定义 6^[10] 设 $\mathcal{R} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ 为三元背景, 称二元背景 $\mathcal{C}_{\{a_i\}}^i = (K_j, K_k, Y_{\{a_i\}}^{jk})$ 为 d-cut (dyadic-cut)。其中 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}, a_i \in K_i$ 。

由定义 4 和定义 6 可知, $(j, k, \{a_i\}) -$ 诱导

算子是 d-cut $\mathcal{C}_{|a_i|}^i = (K_j, K_k, Y_{|a_i|}^{jk})$ 上的 $*$ 算子。

下面通过 $(i) -$ 诱导算子和 d-cut 给出二元背景 $\mathcal{R}_{X_i}^{jk} = (K_j, K_k, Y_{X_i}^{jk})$ 的获取方法。

性质 2 设 $\mathcal{R} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ 为三元背景, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ 且 $j < k, X_i \subseteq K_i$ 。则有

$$X_i^{(i)} = Y_{X_i}^{jk} = \bigcap_{a_i \in X_i} Y_{|a_i|}^{jk} \circ$$

其中, $Y_{X_i}^{jk}$ 是二元背景 $\mathcal{R}_{X_i}^{jk} = (K_j, K_k, Y_{X_i}^{jk})$ 中的二元关系。

证明 首先, 由定义 3 可得 $X_i^{(i)} = \{(a_j, a_k) \in K_j \times K_k \mid \forall a_i \in X_i, (a_i, a_j, a_k) \in Y\}$ 。

又由定义 4 知 $Y_{X_i}^{jk} = \{(a_j, a_k) \in K_j \times K_k \mid \forall a_i \in X_i, (a_i, a_j, a_k) \in Y\}$ 。

因此, 有 $X_i^{(i)} = Y_{X_i}^{jk}$ 。

其次, 证明 $Y_{X_i}^{jk} = \bigcap_{a_i \in X_i} Y_{|a_i|}^{jk}$ 。若 $(a_j, a_k) \in Y_{X_i}^{jk}$, 则由定义 4 可知, $\forall a_i \in X_i$, 有 $(a_i, a_j, a_k) \in Y$, 也就是 $(a_j, a_k) \in \bigcap_{a_i \in X_i} Y_{|a_i|}^{jk}$ 。因此 $Y_{X_i}^{jk} \subseteq \bigcap_{a_i \in X_i} Y_{|a_i|}^{jk}$ 。反之, 若 $(a_j, a_k) \in \bigcap_{a_i \in X_i} Y_{|a_i|}^{jk}$, 则对任意的 $a_i \in X_i$, $(a_i, a_j, a_k) \in Y$ 。从而由定义 4 知 $(a_j, a_k) \in Y_{X_i}^{jk}$, 故 $Y_{X_i}^{jk} \supseteq \bigcap_{a_i \in X_i} Y_{|a_i|}^{jk}$ 。于是, 便可证得 $Y_{X_i}^{jk} = \bigcap_{a_i \in X_i} Y_{|a_i|}^{jk}$ 。

综上可得, $X_i^{(i)} = Y_{X_i}^{jk} = \bigcap_{a_i \in X_i} Y_{|a_i|}^{jk}$ 。

性质 2 也间接地说明了三元背景的两类诱导算子之间的关系。下面是关于 $(i, j, X_k) -$ 诱导算子的一个性质。

性质 3 设 $\mathcal{R} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ 为三元背景, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, $X_i \subseteq K_i$, $X_k \subseteq K_k$ 。则有

$$X_i^{(i, j, X_k)} = \bigcap_{a_i \in X_i} \bigcap_{a_k \in X_k} a_i^{(i, j, |a_k|)} = \bigcap_{a_k \in X_k} \bigcap_{a_i \in X_i} a_i^{(i, j, |a_k|)} \circ$$

证明 首先, 因 $(i, j, X_k) -$ 诱导算子实为二元背景 $\mathcal{R}_{X_k}^{ij} = (K_i, K_j, Y_{X_k}^{ij})$ 上的 $*$ 算子, 故由 $*$ 算子

性质 $X_i^* = \bigcap_{a_i \in X_i} a_i^*$ 可得 $X_i^{(i, j, X_k)} = \bigcap_{a_i \in X_i} a_i^{(i, j, X_k)}$ 。

下面证明 $a_i^{(i, j, X_k)} = \bigcap_{a_k \in X_k} a_i^{(i, j, |a_k|)}$ 。若 $a_j \in a_i^{(i, j, X_k)}$, 则由定义 4 可知 $\forall a_k \in X_k$, 有 $(a_i, a_j, a_k) \in Y$, 即 $\forall a_k \in X_k$, 有 $a_j \in a_i^{(i, j, |a_k|)}$, 因此 $a_i^{(i, j, X_k)} \subseteq \bigcap_{a_k \in X_k} a_i^{(i, j, |a_k|)}$ 。类似地, 由定义 4 可得 $a_i^{(i, j, X_k)} \supseteq \bigcap_{a_k \in X_k} a_i^{(i, j, |a_k|)}$ 。故 $a_i^{(i, j, X_k)} = \bigcap_{a_k \in X_k} a_i^{(i, j, |a_k|)}$, 从而可得 $X_i^{(i, j, X_k)} = \bigcap_{a_i \in X_i} \bigcap_{a_k \in X_k} a_i^{(i, j, |a_k|)}$ 。

根据性质 1 知 $X_i^{(i, j, X_k)} = X_k^{(j, k, X_i)}$, 因此可得

$$X_i^{(i, j, X_k)} = \bigcap_{a_k \in X_k} \bigcap_{a_i \in X_i} a_k^{(j, k, |a_i|)} \circ$$

$a_k^{(j, k, |a_i|)} = a_i^{(i, j, |a_k|)}$, 从而证得

$$X_i^{(i, j, X_k)} = \bigcap_{a_k \in X_k} \bigcap_{a_i \in X_i} a_i^{(i, j, |a_k|)} \circ$$

3 三元概念的获取研究

为了更直观地说明三元概念分析与形式概念分析之间的密切关系, 本节将三元背景 $\mathcal{R} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ 记为 $\mathcal{R} = (G, M, B, Y)$, 其中 G, M 和 B 分别为对象集 K_1 、属性集 K_2 和条件集 K_3 , 且三者均为非空有限集合。

3.1 基于对象 - 条件三元粒概念的三元概念获取方法

在形式概念分析中, 任意一个外延非空的二元概念均可由某些对象概念通过 $\vee$ 运算得到。基于此, 文献[25] 在二元背景中基于对象 - 条件三元概念给出了一种获取三元概念的方法, 其中由一个对象和一个条件定义的对象 - 条件三元概念的描述如下。

定义 7^[25] 设 $\mathcal{R} = (G, M, B, Y)$ 为三元背景, $(g, b) \in G \times B$ 。记

$$h_{13}(g, b) = (g^{(1, 2, |b|)}(1, 2, |b|), g^{(1, 2, |b|)}(g^{(1, 2, |b|)}(1, 2, |b|) \times g^{(1, 2, |b|)}(3)) \circ$$

则称 $h_{13}(g, b)$ 是由对象 g 和条件 b 确定的对象 - 条件三元概念。

基于定义 7 的生成三元概念的方法如定理 2 所示。

定理 2^[25] 设 $\mathcal{R} = (G, M, B, Y)$ 为三元背景, $X_1 \subseteq G, X_3 \subseteq B, X_1 \neq \emptyset, X_3 \neq \emptyset$ 。定义

$$\bigvee_{13} \{h_{13}(g, b) \mid (g, b) \in X_1 \times X_3\} = (A_1, A_2, A_3),$$

其中:

$$A_2 = \bigcap \{g^{(1, 2, |b|)} \mid (g, b) \in X_1 \times X_3\},$$

$$A_3 = \bigcap \{g^{(1, 3, A_2)} \mid g \in X_1\},$$

$$A_1 = A_3^{(1, 3, A_2)} \circ$$

则 $(A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$ 。

结合定义 7 和定理 2 可得与引理 1 相似的结论。对任意的 $(A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$, 有

$$(A_1, A_2, A_3) = \bigvee_{13} \{h_{13}(g, b) \mid (g, b) \in A_1 \times A_3\} \circ$$

因此, 本文将定义 7 中的三元概念称为对象 - 条件三元粒概念, 并记所有对象 - 条件三元粒概念的集合为

$$H_{13} = \{h_{13}(g, b) \mid (g, b) \in G \times B\},$$

对象 - 条件三元粒概念的内涵集为

$$\mathcal{T}(H_{13}) = \{g^{(1,2,|b|)} \mid (g,b) \in G \times B\}.$$

在形式概念分析中,对象内涵的交仍是内涵。但定理 2 说明了只有 $X_1 \times X_3$ 中元素对应的对象 - 条件三元粒概念内涵的交才是某一个三元概念的内涵。于是,在定理 2 的基础上,本文进一步给出判别对象 - 条件三元粒概念内涵的交是某一个三元概念内涵的方法如下。

推论 1 设 $\mathcal{K} = (G,M,B,Y)$ 为三元背景, $\mathcal{T}_\cap(H_{13})$ 是 $\mathcal{T}(H_{13})$ 中元素交构成的集合。 $\forall P \in \mathcal{T}_\cap(H_{13}) \setminus \mathcal{T}(H_{13})$, 若存在 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}(H_{13})$, 有 $P = \cap \mathcal{B}$ 且 $\{(g_i,b_i) \mid g_i^{(1,2,|b_i|)} \in \mathcal{B}\} = \cup g_i \times \cup b_i$, 则 $P \in \mathcal{T}(\mathcal{K})$ 。

由定义 7 和推论 1, 便可得到三元概念内涵的集合 $\mathcal{T}(\mathcal{K}) \setminus \{M\}$ (属性集 M 是否为某一个三元概念的内涵可由定义 5 进行验证,具体方法参考第 4 节的步骤 4)。

例 2 由定义 7 可得表 1 所示三元背景的所有对象 - 条件三元粒概念如表 4 所示。比如,第二行第二列的三元概念 $(C,p,1235)$ 表示的是,由对象 C 和条件 1 确定的对象 - 条件三元粒概念。

表 4 表 1 的对象 - 条件三元粒概念

Tab. 4 Object-condition triadic granular concepts of Tab. 1

	$h_{13}(C,)$	$h_{13}(D,)$	$h_{13}(E,)$
$h_{13}(,1)$	$(C,p,1235)$	$(G,\emptyset,B)$	$(E,q,124)$
$h_{13}(,2)$	$(CE,M,2)$	$(G,pq,2)$	$(CE,M,2)$
$h_{13}(,3)$	$(CD,p,235)$	$(CD,p,235)$	$(G,\emptyset,B)$
$h_{13}(,4)$	$(C,opr,24)$	$(G,q,24)$	$(E,q,124)$
$h_{13}(,5)$	$(G,p,25)$	$(D,opr,5)$	$(G,p,25)$

由表 4 可得 $\mathcal{T}(H_{13}) = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p,q\}, \{o,p,r\}, \{o,q,r\}, M\}$, 进而求得 $\mathcal{T}_\cap(H_{13}) = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p,q\}, \{o,r\}, \{o,p,r\}, \{o,q,r\}, M\}$, 从而可知 $\mathcal{T}_\cap(H_{13}) \setminus \mathcal{T}(H_{13}) = \{\{o,r\}\}$ 。

又因仅存在 $\mathcal{B} = \{\{o,q,r\}, \{o,p,r\}\} \subseteq \mathcal{T}(H_{13})$, 使得 $\{o,r\} = \cap \mathcal{B}$, 且由表 4 可得 $\{(C,4), (D,5) \mid g^{(1,2,|b|)} \in \mathcal{B}\}$, 此时 $\{(C,4), (D,5)\} \neq \{C,D\} \times \{4,5\}$, 所以由推论 1 知 $\{o,r\} \notin \mathcal{T}(\mathcal{K})$ 。于是,可得表 1 所示三元背景中三元概念的内涵集 $\mathcal{T}(\mathcal{K}) = \mathcal{T}(H_{13})$, 该结果与例 1 一致。

事实上,定理 2 给出的获取三元概念的过程可描述为:首先从 $X_1 \times X_3$ 所确定的那些对象 - 条件三元粒概念出发,得到某一个三元概念的内涵 A_2 ,接着在内涵 A_2 所对应的二元背景中由 X_1 通过

* 算子获得一个二元概念 (A_1, A_3) , 继而得到三元概念 (A_1, A_2, A_3) 。而在形式概念分析中,可以通过二元概念的内涵集得到所有的二元概念。受该方法的启发,下面给出从三元概念的内涵集 $\mathcal{T}(\mathcal{K})$ 出发获取所有三元概念的方法。

推论 2 设 $\mathcal{K} = (G,M,B,Y)$ 为三元背景, $A_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{K})$ 。对任意的 $(A'_1, A'_3) \in L(\mathcal{K}_{A_2}^{13})$, 若 $(A'_1 \times A'_3)^{(2)} = A_2$, 则 $(A'_1, A_2, A'_3) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ 。

例 3(续例 2) 由例 2 知 $A_2 = \{p\} \in \mathcal{T}(\mathcal{K})$, A_2 所确定的二元背景 $\mathcal{K}_{A_2}^{13} = (G,B,Y_{A_2}^{13})$ 如表 5 所示。

表 5 二元背景 $\mathcal{K}_{A_2}^{13} = (G,B,Y_{A_2}^{13})$

	1	2	3	4	5
C	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$
D		$\times$	$\times$		$\times$
E		$\times$		$\times$	$\times$

通过计算可得表 5 所示二元背景的二元概念的集合为

$$L(\mathcal{K}_{A_2}^{13}) = \{(G,25), (C,1235), (E,245), (CD,235), (\emptyset,B)\},$$

进而根据定义 3 可得:

$$\begin{aligned} (G \times \{2,5\})^{(2)} &= \{p\}, \\ (\{C\} \times \{1,2,3,5\})^{(2)} &= \{p\}, \\ (\{E\} \times \{2,4,5\})^{(2)} &= \{p\}, \\ (\{C,D\} \times \{2,3,5\})^{(2)} &= \{p\}, \\ (\emptyset \times B)^{(2)} &= M \neq \{p\}. \end{aligned}$$

因此,由推论 2 知 $(G,p,25), (C,p,1235), (E,p,245), (CD,p,235) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ 。即内涵为 $\{p\}$ 的三元概念共有 4 个,结果与例 1 一致。

本小节基于定理 2 给出了从对象 - 条件三元粒概念的内涵集出发获取三元概念的方法:先从对象 - 条件三元粒概念的内涵集 $\mathcal{T}(H_{13})$ 得到三元概念的内涵集 $\mathcal{T}(\mathcal{K})$ (见推论 1), 进而由三元概念的内涵集 $\mathcal{T}(\mathcal{K})$ 便可得到所有三元概念 $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ (见推论 2)。

此外,根据条件 - 对象三元概念的定义^[26], 在本文中将所有条件 - 对象三元粒概念的集合记为

$$H_{31} = \{((b^{(2,3,|g|)} \times b^{(2,3,|g|)(2,3,|g|)})^{(1)}, b^{(2,3,|g|)}, b^{(2,3,|g|)(2,3,|g|)}) \mid (g,b) \in G \times B\}.$$

又由性质 1 可知 $b^{(2,3,|g|)} = g^{(1,2,|b|)}$, 故条件 - 对象三元粒概念的内涵集 $\mathcal{T}(H_{31})$ 等于对象 - 条件

三元粒概念的内涵集 $\mathcal{T}(H_{13})$ 。因此由条件-对象三元粒概念的内涵集 $\mathcal{T}(H_{31})$ 出发,根据推论1和推论2也能得到所有的三元概念,于是在本小节所提出的获取所有三元概念的方法中,条件-对象三元粒概念和对象-条件三元粒概念所起到的作用是相同的。

类似于上述对象-条件三元粒概念和条件-对象三元粒概念之间的关系,在本文所提出的获取三元概念的方法中,属性-对象三元概念和对象-属性三元概念具有相同的作用,条件-属性三元概念和属性-条件三元概念具有相同的作用,因此本文后续仅基于属性-对象三元概念和条件-属性三元概念给出相关的获取三元概念的方法。

3.2 基于属性-对象三元粒概念的三元概念获取方法

本小节从一个对象和一个属性定义的属性-对象三元概念出发,给出获取所有三元概念的相关内容。

定义8^[26] 设 $\mathcal{K} = (G, M, B, Y)$ 为三元背景, $(g, m) \in G \times M_0$ 记

$$h_{21}(m, g) = ((m^{(2,3, \{g\})} \times m^{(2,3, \{g\})})^{(1)}, m^{(2,3, \{g\})}, m^{(2,3, \{g\})}),$$

则称 $h_{21}(m, g)$ 是由对象 g 和属性 m 确定的属性-对象三元概念。

定理3 设 $\mathcal{K} = (G, M, B, Y)$ 为三元背景, $X_1 \subseteq G, X_2 \subseteq M, X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset$ 。定义

$$\bigvee_{21} \{h_{21}(m, g) \mid (g, m) \in X_1 \times X_2\} = (A_1, A_2, A_3),$$

其中:

$$A_3 = \bigcap \{m^{(2,3, \{g\})} \mid (g, m) \in X_1 \times X_2\},$$

$$A_1 = \bigcap \{m^{(1,2, A_3)} \mid m \in X_2\},$$

$$A_2 = A_1^{(1,2, A_3)}.$$

则 $(A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ 。

对于定理3的证明,一方面利用 G, M, B 这三个集合的对偶关系可以从定理2的证明类似得到,另一方面从三元背景中两类诱导算子之间的关系出发也可以得到,具体过程如下。

证明 在三元背景 $\mathcal{K} = (G, M, B, Y)$ 中,令 $X_1 = \{g_1, g_2, \dots, g_s\} \subseteq G, X_2 = \{m_1, m_2, \dots, m_t\} \subseteq M$,由性质1和3可得:

$$\begin{aligned} A_3 &= \bigcap \{m^{(2,3, \{g\})} \mid (g, m) \in X_1 \times X_2\} = \\ &= (m_1^{(2,3, \{g_1\})} \cap \dots \cap m_1^{(2,3, \{g_s\})}) \cap \dots \\ &\cap (m_t^{(2,3, \{g_1\})} \cap \dots \cap m_t^{(2,3, \{g_s\})}) = \end{aligned}$$

$$X_2^{(2,3, X_1)} = X_1^{(1,3, X_2)},$$

$$A_1 = \bigcap \{m^{(1,2, A_3)} \mid m \in X_2\} =$$

$$m_1^{(1,2, A_3)} \cap \dots \cap m_t^{(1,2, A_3)} =$$

$$X_2^{(1,2, A_3)} = A_3^{(1,3, X_2)} = X_1^{(1,3, X_2)(1,3, X_2)},$$

$$A_2 = A_1^{(1,2, A_3)} = (A_1 \times A_3)^{(2)}.$$

故由定理1可知 (A_1, A_2, A_3) 是一个三元概念。

结合定义8和定理3可得与引理1相似的结论:对任意的 $(A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$,有

$$(A_1, A_2, A_3) = \bigvee_{21} \{h_{21}(m, g) \mid (g, m) \in A_1 \times A_2\}.$$

因此,类似于定义7将定义8中的三元概念称为属性-对象三元粒概念,并记所有属性-对象三元粒概念的集合为

$$H_{21} = \{h_{21}(m, g) \mid (g, m) \in G \times M\},$$

属性-对象三元粒概念的方式集为

$$\mathcal{M}(H_{21}) = \{m^{(2,3, \{g\})} \mid (g, m) \in G \times M\}.$$

由对象-属性三元概念的定义^[26]和性质1知,对象-属性三元粒概念的方式集等于属性-对象三元粒概念的方式集。

下面举例说明定理3的方法。

例4(续例1) 仍然给定 $X_1 = \{C, E\} \subseteq G, X_2 = \{p, q\} \subseteq M$,并记由 X_1 和 X_2 通过定理3得到的三元概念为 (B_1, B_2, B_3) 。则有

$$B_3 = p^{(2,3, \{C\})} \cap q^{(2,3, \{C\})} \cap p^{(2,3, \{E\})} \cap q^{(2,3, \{E\})},$$

$$B_1 = p^{(1,2, B_3)} \cap q^{(1,2, B_3)},$$

$$B_2 = B_1^{(1,2, B_3)}.$$

对象 C 的d-cut $\mathcal{C}_{|C|}^1 = (M, B, Y_{|C|}^{23})$ 和对象 E 的d-cut $\mathcal{C}_{|E|}^1 = (M, B, Y_{|E|}^{23})$ 分别如表6和表7所示。

表6 对象 C 的d-cut $\mathcal{C}_{|C|}^1 = (M, B, Y_{|C|}^{23})$

Tab. 6 A d-cut $\mathcal{C}_{ C }^1 = (M, B, Y_{ C }^{23})$ of the object C					
	1	2	3	4	5
o		×		×	
p	×	×	×		×
q		×		×	
r		×		×	

在表6中,由于

$$p^* = \{1, 2, 3, 5\}, q^* = \{2, 4\},$$

故

$$p^{(2,3, \{C\})} = \{1, 2, 3, 5\},$$

$$q^{(2,3, \{C\})} = \{2, 4\}.$$

表 7 对象 E 的 d-cut $\mathcal{C}_{|E|}^1 = (M, B, Y_{|E|}^{23})$

Tab. 7 A d-cut $\mathcal{C}_{|E|}^1 = (M, B, Y_{|E|}^{23})$ of the object E

	1	2	3	4	5
o		×			
p		×		×	×
q	×	×		×	
r		×			

在表 7 中,因为

$p^* = \{2, 4, 5\}, q^* = \{1, 2, 4\},$
则 $p^{(2,3,|E|)} = \{2, 4, 5\}, q^{(2,3,|E|)} = \{1, 2, 4\}。$
从而根据定理 3 可得

$B_3 = \{1, 2, 3, 5\} \cap \{2, 4\} \cap \{2, 4, 5\} \cap \{1, 2, 4\} = \{2\}。$

B_3 对应的二元背景 $\mathcal{K}_{B_3}^{12} = (G, M, Y_{B_3}^{12})$ 如表 8 所示。

表 8 二元背景 $\mathcal{K}_{B_3}^{12} = (G, M, Y_{B_3}^{12})$

Tab. 8 A binary context $\mathcal{K}_{B_3}^{12} = (G, M, Y_{B_3}^{12})$

	o	p	q	r
C	×	×	×	×
D		×	×	
E	×	×	×	×

在表 8 中,由于

$p^* = G, q^* = G,$
即 $p^{(1,2,B_3)} = G, q^{(1,2,B_3)} = G,$
进而可得 $B_1 = p^{(1,2,B_3)} \cap q^{(1,2,B_3)} = G。$

又因为在表 8 中

$B_1^* = G^* = \{p, q\}。$

于是 $B_2 = B_1^{(1,2,B_3)} = \{p, q\}。$ 故由定理 3 知 $(G, pq, 2)$ 是由 $X_1 = \{C, E\}$ 和 $X_2 = \{p, q\}$ 生成的一个三元概念。

通过对比例 1 和例 4, 我们可以发现:给定相同的对象子集 X_1 和属性子集 X_2 , 由定理 3 和定理 1 得到了具有同一个方式的两个不同的三元概念。原因是由 X_1 和 X_2 确定方式 $A_3 (= B_3)$ 之后, 在定理 1 中是通过 X_1 在二元背景 $\mathcal{K}_{A_3}^{12}$ 中生成二元概念 (A_1, A_2) 。而定理 3 是通过 X_2 在二元背景 $\mathcal{K}_{B_3}^{12}$ 中生成二元概念 (B_1, B_2) 。由此说明定理 3 的方法与定理 1 的方法本质上是一样的。

此外,基于定理 3 可以得到判别属性 - 对象三元粒概念方式集 $\mathcal{M}(H_{21})$ 的任意子集的交是某一个三元概念方式的方法,以及从三元概念的

方式集 $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ 出发获取所有三元概念的方法。具体内容如推论 3 和 4 所述。

推论 3 设 $\mathcal{K} = (G, M, B, Y)$ 为三元背景, $\mathcal{M}_{\cap}(H_{21})$ 是 $\mathcal{M}(H_{21})$ 中元素交构成的集合。 $\forall Q \in \mathcal{M}_{\cap}(H_{21}) \setminus \mathcal{M}(H_{21})$, 若存在 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{M}(H_{21})$, 有 $Q = \cap \mathcal{Y}$ 且 $\{(g_j, m_j) \mid m_j^{(2,3,|g_j|)} \in \mathcal{Y}\} = \cup g_j \times \cup m_j$, 则 $Q \in \mathcal{M}(\mathcal{K})。$

推论 4 设 $\mathcal{K} = (G, M, B, Y)$ 为三元背景, $A_3 \in \mathcal{M}(\mathcal{K})。$ 对任意的 $(A'_1, A'_2) \in L(\mathcal{K}_{A_3}^{12})$, 若 $(A'_1 \times A'_2)^{(3)} = A_3$, 则 $(A'_1, A'_2, A_3) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})。$

本小节基于定理 3 给出了从属性 - 对象三元粒概念的方式集出发获取三元概念的方法:先从属性 - 对象三元粒概念的方式集 $\mathcal{M}(H_{21})$ 得到三元概念的方式集 $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ (见推论 3), 进而由三元概念的方式集 $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ 得到了所有三元概念 $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ (见推论 4)。

3.3 基于条件 - 属性三元粒概念的三元概念获取方法

下面给出由一个属性和一个条件定义的条件 - 属性三元概念出发获取所有三元概念的相关方法。

定义 9^[26] 设 $\mathcal{K} = (G, M, B, Y)$ 为三元背景, $(m, b) \in M \times B。$ 记

$$h_{32}(b, m) = (b^{(1,3,|m|)}, (b^{(1,3,|m|)} \times b^{(1,3,|m|)(1,3,|m|)})^{(2)}, b^{(1,3,|m|)(1,3,|m|)}),$$

则称 h_{32} 是由属性 m 和条件 b 确定的条件 - 属性三元概念。

定理 4 设 $\mathcal{K} = (G, M, B, Y)$ 为三元背景, $X_2 \subseteq M, X_3 \subseteq B, X_2 \neq \emptyset, X_3 \neq \emptyset。$ 定义

$$\bigvee_{32} \{h_{32}(b, m) \mid (m, b) \in X_2 \times X_3\} = (A_1, A_2, A_3),$$

其中:

$$A_1 = \cap \{b^{(1,3,|m|)} \mid (m, b) \in X_2 \times X_3\},$$

$$A_2 = \cap \{b^{(2,3,A_1)} \mid b \in X_3\},$$

$$A_3 = A_2^{(2,3,A_1)}。$$

则 $(A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})。$

该定理的证明思路和定理 3 类似, 此处不再赘述。由定义 9 和定理 4 可得与引理 1 相似的结论为:对任意的 $(A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$, 有

$$(A_1, A_2, A_3) = \bigvee_{32} \{h_{32}(b, m) \mid (m, b) \in A_2 \times A_3\}。$$

于是,将定义 9 中的三元概念称为条件 - 属性三元粒概念,并记所有条件 - 属性三元粒概念的集

合为

$$H_{32} = \{h_{32}(b, m) \mid (m, b) \in M \times B\},$$

条件 - 属性三元粒概念的外延集为

$$\mathcal{E}(H_{32}) = \{b^{(1,3, \{m\})} \mid (m, b) \in M \times B\}.$$

由属性 - 条件三元概念的定义^[26]和性质 1 可知,属性 - 条件三元粒概念的外延集等于条件 - 属性三元粒概念的外延集。

通过定理 4 可得判别条件 - 属性三元粒概念外延集 $\mathcal{E}(H_{32})$ 的任意子集的交是某一个三元概念外延的方法,以及从三元概念外延集 $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ 出发获取所有三元概念的方法。相关内容如推论 5 和 6 所述。

推论 5 设 $\mathcal{K} = (G, M, B, Y)$ 为三元背景, $\mathcal{E}_{\cap}(H_{32})$ 是 $\mathcal{E}(H_{32})$ 中元素交构成的集合。 $\forall R \in \mathcal{E}_{\cap}(H_{32}) \setminus \mathcal{E}(H_{32})$, 若存在 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{E}(H_{32})$, 有 $R = \cap \mathcal{Z}$ 且 $\{(m_l, b_l) \mid b_l^{(1,3, \{m_l\})} \in \mathcal{Z}\} = \cup m_l \times \cup b_l$, 则 $R \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$ 。

推论 6 设 $\mathcal{K} = (G, M, B, Y)$ 为三元背景, $A_1 \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$ 。对任意的 $(A'_2, A'_3) \in L(\mathcal{K}_{A_1}^{23})$, 若 $(A'_2 \times A'_3)^{(1)} = A_1$, 则 $(A_1, A'_2, A'_3) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ 。

本小节基于定理 4 给出了从条件 - 属性三元粒概念的外延集出发获取三元概念的方法: 先从条件 - 属性三元粒概念的外延集 $\mathcal{E}(H_{32})$ 得到三元概念的外延集 $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ (见推论 5), 进而由三元概念的外延集 $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ 得到了所有三元概念 $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ (见推论 6)。

4 例子

在第 3 节中,分别从对象 - 条件三元粒概念的内涵集、属性 - 对象三元粒概念的方式集以及条件 - 属性三元粒概念的外延集三个不同的角度给出获取三元概念的方法,这三种方法的原理是相同的,都是借鉴形式概念分析中利用对象内涵集(属性外延集)获取所有二元概念的思路。

接下来以属性 - 对象三元粒概念为例,给出获取所有三元概念的具体步骤。

步骤 1 根据定义 8 得到三元背景的所有属性 - 对象三元粒概念集合

$$H_{21} = \{h_{21}(m, g) \mid (g, m) \in G \times M\},$$

进而得到属性 - 对象三元粒概念的方式集 $\mathcal{M}(H_{21})$ 。

步骤 2 $\forall Q \in \mathcal{M}_{\cap}(H_{21}) \setminus \mathcal{M}(H_{21})$, 利用推论 3 得到新增的方式集 $\mathcal{M}'(\mathcal{K})$ 。

步骤 3 $\forall A_3 \in \mathcal{M}(H_{21}) \cup \mathcal{M}'(\mathcal{K})$, 构造二元背景 $\mathcal{K}_{A_3}^{12}$ 并获取相应的二元概念的集合 $L(\mathcal{K}_{A_3}^{12})$, 同时记 $S = \{(Y_1, Y_2) \mid (Y_1, Y_2, Y_3) \in H_{21}\}$ 。对任意的 $(A'_1, A'_2) \in L(\mathcal{K}_{A_3}^{12}) \setminus S$, 利用推论 4 判断 (A'_1, A'_2, A_3) 是否为三元概念, 将由此得到的三元概念的集合记为 $\mathcal{L}_1$ 。

步骤 4 若 $B \notin \mathcal{M}(H_{21})$, 则根据定义 5 验证 $(\emptyset, M, B)$ 和 $(G, \emptyset, B)$ 是否为三元概念, 将判断得到的结果记为 $\mathcal{L}_2$ 。

最后,通过上述 4 个步骤可得该三元背景的所有三元概念为 $\mathcal{L}(\mathcal{K}) = H_{21} \cup \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ 。

例 5 对于表 1 的三元背景,利用上述步骤求其所有的三元概念。

首先,根据定义 8 计算所有属性 - 对象三元粒概念,详细过程如下。

1) 对 $G = \{C, D, E\}$ 中的每一个对象 g 所对应的 d-cut $\mathcal{E}_{|g|}^1$, 计算其二元概念集合

$$\{(m^{(2,3, \{g\})} (2,3, \{g\}) m^{(2,3, \{g\})}) \mid$$

$$m \in \{o, p, q, r\}\},$$

所得结果如表 9 所示。比如,第 2 行第 2 列的二元概念 $(oqr, 24)$ 表示的是,在对象 C 对应的 d-cut $\mathcal{E}_{|C|}^1$ 中由属性 o 生成的二元概念。

表 9 表 1 中每个对象对应的 d-cut 中的二元概念
Tab. 9 The binary concepts of the d-cut corresponding to each object in Tab. 1

	$\mathcal{E}_{ C }^1$	$\mathcal{E}_{ D }^1$	$\mathcal{E}_{ E }^1$
$\{o\}$	$(oqr, 24)$	$(opr, 5)$	$(M, 2)$
$\{p\}$	$(p, 1235)$	$(p, 235)$	$(p, 245)$
$\{q\}$	$(oqr, 24)$	$(q, 24)$	$(q, 124)$
$\{r\}$	$(oqr, 24)$	$(opr, 5)$	$(M, 2)$

进一步,利用 $*$ 算子在表 3 所示的二元背景 $\mathcal{K}^{(1)} = (G, M \times B, Y^{(1)})$ 中可得所有属性 - 对象三元粒概念的集合

$$H_{21} = \{(C, oqr, 24), (E, p, 245), (D, opr, 5), (CE, M, 2), (E, q, 124), (C, p, 1235), (CD, p, 235), (G, q, 24)\},$$

属性 - 对象三元粒概念的方式集

$$\mathcal{M}(H_{21}) = \{\{2\}, \{5\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}\}.$$

属性 - 对象三元粒概念方式的交构成的集合

$\mathcal{M}_{\cap}(H_{21}) = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{1,2\}, \{1,2,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{1,2,3,5\}\}.$

从而可得

$$\mathcal{M}_{\cap}(H_{21}) \setminus \mathcal{M}(H_{21}) = \{\emptyset, \{2,5\}, \{1,2\}\}.$$

2) 对于 $\emptyset$, 因存在 $\mathcal{Y}_1 = \{\{2,4\}, \{5\}\} \subseteq \mathcal{M}(H_{21})$ 使得 $\emptyset = \cap \mathcal{Y}_1$, 且由表 9 可得 $\{(C,o), (D,o) \mid m^{(2,3,\{g\})} \in \mathcal{Y}_1\}$, 此时 $\{(C,o), (D,o)\} = \{C,D\} \times \{o\}$, 故由推论 3 可知 $\emptyset \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$.

对于 $\{2,5\}$, 因存在 $\mathcal{Y}_2 = \{\{2,3,5\}, \{2,4,5\}\} \subseteq \mathcal{M}(H_{21})$ 使得 $\{2,5\} = \cap \mathcal{Y}_2$, 且由表 9 可得 $\{(D,p), (E,p) \mid m^{(2,3,\{g\})} \in \mathcal{Y}_2\}$, 此时 $\{(D,p), (E,p)\} = \{D,E\} \times \{p\}$, 于是由推论 3 知 $\{2,5\} \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$.

对于 $\{1,2\}$, 因仅有 $\mathcal{Y}_3 = \{\{1,2,3,5\}, \{1,2,4\}\} \subseteq \mathcal{M}(H_{21})$ 使得 $\{1,2\} = \cap \mathcal{Y}_3$, 且由表 9 可得 $\{(C,p), (E,q) \mid m^{(2,3,\{g\})} \in \mathcal{Y}_3\}$, 此时 $\{(C,p), (E,q)\} \neq \{C,E\} \times \{p,q\}$, 故由推论 3 知 $\{1,2\} \notin \mathcal{M}(\mathcal{K})$.

按照上述过程, 最终可得新增的方式集 $\mathcal{M}'(\mathcal{K}) = \{\emptyset, \{2,5\}\}.$

3) 另外, 由 H_{21} 可得

$$S = \{(C,oqr), (E,p), (D,opr), (E,q), (CE,M), (C,p), (CD,p), (G,q)\}.$$

取 $A_3 = \{2,4\}$, 该方式所对应的二元背景 $\mathcal{K}_{A_3}^{12}$ 如表 10 所示.

表 10 二元背景 $\mathcal{K}_{A_3}^{12} = (G,M,Y_{A_3}^{12})$

Tab. 10 A binary context $\mathcal{K}_{A_3}^{12} = (G,M,Y_{A_3}^{12})$

	o	p	q	r
C	$\times$		$\times$	$\times$
D			$\times$	
E		$\times$	$\times$	

在表 10 中, 通过计算可得

$$L(\mathcal{K}_{A_3}^{12}) = \{(C,oqr), (G,q), (E,pq), (\emptyset,M)\}.$$

于是有

$$L(\mathcal{K}_{A_3}^{12}) \setminus S = \{(E,pq), (\emptyset,M)\}.$$

由定义 3 得

$$\begin{aligned} (\{E\} \times \{p,q\})^{(3)} &= \{2,4\} = A_3, \\ (\emptyset \times M)^{(3)} &= B \neq A_3. \end{aligned}$$

故由推论 4 知 $(E,pq,24)$ 是三元概念。
类似地, 对 $\mathcal{M}(H_{21}) \cup \mathcal{M}'(\mathcal{K})$ 中的元素重复上述过程, 最终可得

$$\mathcal{L}_1 = \{(G,p,25), (G,pq,2), (E,pq,24), (G,M,\emptyset)\}.$$

4) 因 $B = \{1,2,3,4,5\} \notin \mathcal{M}(H_{21})$, 故根据定义 5 进行判断, 可知 $(\emptyset,M,B)$ 和 $(G,\emptyset,B)$ 是三元概念, 即

$$\mathcal{L}_2 = \{(\emptyset,M,B), (G,\emptyset,B)\}.$$

由此得到了表 1 所示三元背景的所有三元概念, 其结果与例 1 一致.

5 结语

本文首先对三元背景上两类诱导算子的相关性性质进行了分析; 其次, 借鉴三元概念与二元概念的关联性, 给出了由对象-条件(属性-对象、条件-属性)三元粒概念的内涵集(方式集、外延集)出发获取所有三元概念的方法, 并说明条件-对象(对象-属性、属性-条件)三元粒概念与对象-条件(属性-对象、条件-属性)三元粒概念在此方法中所起到的作用是相同的。这三种方法的原理是一样的, 只是描述的角度不同, 它们之间的关系如图 1 所示。在实际问题中可根据具体情况选择相应的方法。最后, 以属性-对象三元粒概念为例, 给出基于三元概念方式集的获取所有三元概念的具体步骤。

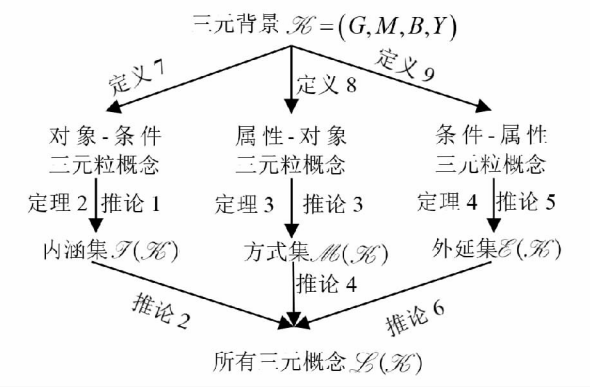


图 1 本文所提 3 种方法之间的关系

Fig. 1 The relationships of the three proposed methods

后续我们将在利用三元概念内涵集(方式集、外延集)获取三元概念方法的基础上, 进一步研究三元概念的动态更新方法以及带有决策属性的三元背景的知识获取等问题。

参考文献

- [1] LEHMANN F, WILLE R. A triadic approach to formal concept analysis [C] // LUKOSE D, DELUGACH H S, KEELER M, et al. Proceedings of the 3rd International Conference on Conceptual Structures Applications, Implementation and Theory. Berlin: Springer, 1995:32-43.
- [2] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts [C] // RIVAL I. Ordered Sets. Dordrecht-Boston: Reidel, 1982: 445-470.
- [3] GANTER B, WILLE R. Formal concept analysis: Mathematical foundations [M]. Berlin: Springer, 1999:17-22.
- [4] WILLE R. The basic theorem of triadic concept analysis [J]. Order, 1995, 12 (2): 149-158.
- [5] OSICKA P, KONECNY J. General approach to triadic concept analysis [C] // NAPOLI A, OKUMA A. Proceedings of the 7th International Conference on Concept Lattices and Their Applications. Sevilla: CEUR-WS. Org, 2010: 116-126.
- [6] BIEDERMANN K. Triadic Galois connections [C] // LUDERS O. General algebra and applications in discrete mathematics. Aachen: Shaker Verlag, 1997: 23-33.
- [7] BIEDERMANN K. How triadic diagrams represent conceptual structures [C] // LUKOSE D, DELUGACH H S, KEELER M, et al. Proceedings of the 5th International Conference on Conceptual Structures Fulfilling Peirce's Dream. Berlin: Springer, 1997: 304-317.
- [8] MISSAOUI R, KWUIDA L. Mining triadic association rules from ternary relations [C] // NAPOLI A, OKUMA A. Proceedings of the 9th International Conference on Formal Concept Analysis. Berlin: Springer, 2011: 204-218.
- [9] GANTER B, OBIEDKOV S A. Implications in triadic formal contexts [C] // KAMEYAMA Y, SOWA J F. Proceedings of the 12th International Conference on Conceptual Structures. Berlin: Springer, 2004: 186-195.
- [10] GLODEANU C V. Triadic factor analysis [C] // NAPOLI A, OKUMA A. Proceedings of the 7th International Conference on Concept Lattices and Their Applications. Sevilla, Spain: CEUR-WS. Org, 2010: 127-138.
- [11] BELOHLAVEK R, OSICKA P. Triadic concept analysis of data with fuzzy attributes [C] // 2010 IEEE International Conference on Granular Computing. Piscataway: IEEE, 2010: 661-665.
- [12] 魏玲, 万青, 钱婷等. 三元概念分析综述 [J]. 西北大学学报 (自然科学版), 2014, 44 (5): 689-699.
WEI L, WAN Q, QIAN T, et al. Overview of triadic concept analysis [J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2014, 44 (5): 689-699.
- [13] WEI L, QI J J, ZHANG W X. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts [J]. Science in China Series F: Information Sciences, 2008, 51 (7): 910-923.
- [14] 魏玲, 曹丽, 祁建军, 等. 形式概念分析中的概念约简与概念特征 [J]. 中国科学: 信息科学, 2020, 50 (12): 1817-1833.
WEI L, CAO L, QI J J, et al. Concept reduction and concept characteristics in formal concept analysis [J]. Scientia Sinica Informationis, 2020, 50 (12): 1817-1833.
- [15] 李金海, 吴伟志, 邓硕. 形式概念分析的多粒度标记理论 [J]. 山东大学学报 (理学版), 2019, 54 (2): 30-40.
LI J H, WU W Z, DENG S. Multi-scale theory in formal concept analysis [J]. Journal of Shandong University (Natural science), 2019, 54 (2): 30-40.
- [16] 李金海, 李玉斐, 米允龙, 等. 多粒度形式概念分析的介粒度标记方法 [J]. 计算机研究与发展, 2020, 57 (2): 447-458.
LI J H, LI Y F, MI Y L, et al. Meso-granularity labeled method for multi-granularity formal concept analysis [J]. Journal of Computer Research and Development, 2020, 57 (2): 447-458.
- [17] YAO Y Y, CHEN Y H. Rough set approximations in formal concept analysis [C] // PETRILLI G, DOMINGUE J. Proceedings of the 23rd International Meeting of the North American Fuzzy Information Proceedings of Society. Heidelberg: Springer, 2004: 796-801.
- [18] 李同军, 王霞, 徐优红. 形式概念的布尔计算方法 [J]. 南京大学学报 (自然科学版), 2013, 49 (5): 553-560.
LI T J, WANG X, XU Y H. Boolean computation approach of formal concepts [J]. Journal of Nanjing University (Natural Sciences), 2013, 49 (5): 553-560.
- [19] 石慧, 魏玲. 面向对象 (属性) 概念格的布尔表达 [J]. 南京大学学报 (自然科学), 2015, 51 (2): 415-420.
SHI H, WEI L. Boolean expression of object (property)-oriented concept lattice [J]. Journal of Nanjing University (Natural Sciences), 2015, 51 (2): 415-

420.

[20] 魏玲, 曹丽, 祁建军. 三元背景基于二元关系不变的约简[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2017, 47(3): 313-320.

WEI L, CAO L, QI J J. Reduction based on the binary relations for triadic contexts [J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2017, 47(3): 313-320.

[21] WAN Q, LI J H, WEI L. Optimal granule combination selection based on multi-granularity triadic concept analysis[J]. Cognitive Computation, 2022, 14(6): 1844-1858.

[22] ANANIAS K H A, MISSAOUI R, RUAS P H B, et al. Triadic concept approximation [J]. Information Sciences, 2021, 572: 126-146.

[23] 王霞, 张茜, 李俊余, 等. 基于粗糙集的三元概念分析[J]. 山东大学学报(理学版), 2017, 52(7): 37-43.

WANG X, ZHANG Q, LI J Y, et al. Triadic concept analysis based on rough set theory [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2017, 52(7): 37-43.

[24] 王霞, 李俊余, 吴伟志. 三元概念的布尔矩阵表示方法[J]. 计算机科学, 2023, 50(6): 109-115.

WANG X, LI J Y, WU W Z. Boolean matrix representation of triadic concepts [J]. Computer Science, 2023, 50(6): 109-115.

[25] 王霞, 江山, 李俊余, 等. 三元概念的一种构造方法[J]. 计算机研究与发展, 2019, 56(4): 844-853.

WANG X, JIANG S, LI J Y. A construction method of triadic concepts[J]. Journal of Computer Research and Development, 2019, 56(4): 844-853.

[26] 李俊余, 李星璇, 王霞, 等. 基于三元因子分析的三元概念约简[J]. 南京大学学报(自然科学), 2020, 56(4): 480-493.

LI J Y, LI X X, WANG X, et al. Reduction of triadic concepts based on triadic factor analysis [J]. Journal of Nanjing University (Natural Science), 2020, 56(4): 480-493.

(编辑 张 欢)